ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. jan. 10.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (18 pont)

a) Írja fel egy valós konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját!
Írja fel erre az esetre a karakterisztikus egyenletet! Konjugált komplex gyökök esetén hogyan kapjuk meg az általános valós megoldást? Indokoljon!

b) Adja meg az

$$y'' - 7y' + 12y = 24x - 40e^{-x}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

a) $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, 2$ (2)

$\boxed{8}$ A karakterisztikus egyenlet:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (1)$$

$\lambda_1 = \alpha + j\beta$, $\lambda_2 = \alpha - j\beta$

$Y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x)$
$Y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j(-\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x)$
Mint tudjuk Y_1 és Y_2 tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás.

$$\left.\begin{aligned} Y_1^* &:= \tfrac{Y_1+Y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \; (= \operatorname{Re} e^{\lambda_1 x}) \\ Y_2^* &:= \tfrac{Y_1-Y_2}{2j} = e^{\alpha x}\sin\beta x \; (= \operatorname{Im} e^{\lambda_1 x}) \end{aligned}\right\}$$

Ezek is lineárisan függetlenek.
Ezekre cseréljük le Y_1, Y_2-t.

Tehát látjuk, hogy Y_1^*, illetve Y_2^* az Y_1 valós és képzetes része.

Tehát $y_H = (C_1 Y_1^* + C_2 Y_2^* =) \; C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda-3)(\lambda-4) = 0$ $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$

$\boxed{10}$ $y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$ (4)

$$\begin{array}{r|l} 12\cdot & y_{ip} = Ax + B + Ce^{-x} \quad (1) \\ -7\cdot & y_{ip}' = A - Ce^{-x} \\ 1\cdot & y_{ip}'' = Ce^{-x} \end{array}$$

$x(12A) + (12B - 7A) + e^{-x}(12C + 7C + C) = 24x - 40e^{-x}$

$12A = 24 \Rightarrow A = 2$; $12B - 7A = 0 \Rightarrow B = \frac{7}{6}$; $20C = -40 \Rightarrow C = -2$

$y_{ip} = 2x + \frac{7}{6} - 2e^{-x}$ (3)

$y_{id} = y_H + y_{ip} = \dots$ (2)

an2Xv110110/1.

2. feladat (15 pont)

$$f(x) = \operatorname{ch} x\,, \qquad\qquad g(x) = x\ \operatorname{ch}(5\,x^2)$$

a) Írja fel az f és g függvények $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorait és adja meg azok konvergencia tartományait!

b) $g^{(100)}(0) = ?\,,\qquad g^{(101)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Írja fel g deriváltfüggvényének $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! Indokoljon!

a.) $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ (2) $\qquad R = \infty$ (K.T. $= \mathbb{R}$) (1)

$g(x) = x \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!}\Big|_{u=5x^2} = x \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{4n}}$; $R = \infty$ (1)

b.) $g^{(n)}(0) = n!\, a_n$ (2) $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{4n+1}$ (3)

$g^{(100)}(0) = 100!\, \underbrace{a_{100}}_{=0,\ \text{mert}\ \nexists n \in \mathbb{N}:\ 4n+1=100} = 0$ (1)

$g^{(101)}(0) = 101!\, a_{101} = 101!\, \frac{5^{50}}{(50)!}$ (1)

$4n+1 = 101 \Rightarrow n = 25$

c.) $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n)!} (4n+1)\, x^{4n}$ (2)

$R = \infty$, mert a „derivált sor" konvergenciasugara ugyanaz, mint az eredeti soré. (2)

3. feladat (17 pont)

a) Ismertesse a binomiális sort!
Mennyi a konvergenciasugara? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 + 6x^3}}$$

Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!
$a_9 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

a.) $\alpha \neq -1$ esetén

$\boxed{9}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (2)$$

(T) $R = 1$ (1)

an2Xv11011012.

$$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 1 \quad 6$$

b.) $\boxed{8}$

$$f(x) = (1+6x^3)^{-1/5} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}u^k\Big|_{\substack{\alpha=-\frac{1}{5}\\ u=6x^3}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/5}{k}6^k x^{3k} \quad 4$$

$$|6x^3| = 6|x|^3 < 1 \Longrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = R \quad 2$$

$$a_9 = \binom{-1/5}{3}6^3 = \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\,6^3 \quad 2$$

$(k=3)$

4. feladat (8 pont)

$$f(x,y) = \frac{6x-2y}{3x+4y} \qquad (x_0, y_0) = (-1, 1)$$

a) $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = ?$

b) Milyen irányban lesz az (x_0, y_0) pontban az iránymenti derivált maximális? Adja meg ezt a maximális értéket is!

a.) $\boxed{4}$

$$f'_x = \frac{6(3x+4y)-(6x-2y)\cdot 3}{(3x+4y)^2}$$

$$f'_y = \frac{-2(3x+4y)-(6x-2y)\cdot 4}{(3x+4y)^2}$$

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\,\underline{i} + f'_y(x_0,y_0)\,\underline{j} = 30\,\underline{i} + 30\,\underline{j}$$

b.)

$$\max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{(x_0,y_0)} = |\operatorname{grad} f(x_0,y_0)| = \sqrt{30^2+30^2} \quad 2$$

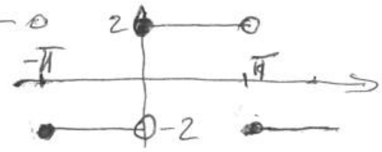
$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0,y_0)}{|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{j} \quad 2$$

5. feladat (12 pont)*

Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} -2\,, & \text{ha} \quad x \in [-\pi\,, 0) \\ 2\,, & \text{ha} \quad x \in [0\,, \pi) \end{cases} \quad , \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Írja fel az 2π szerint periodikus f függvény Fourier sorát!
Jelölje $\phi(x)$ a Fourier sor összegfüggvényét! $\phi(0) = ?$, $\phi(\pi/2) = ?$



Ha a szakadási pontokban megváltoztatjuk a függvény értékét 0-ra (ez nem változtat az együtthatók kiszámítására szolgáló integrálok értékén), akkor páratlan függvényt kapunk (legyen $f^*(x)$)

Ezért $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ 3

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f^*(x)\sin kx}_{\text{páros}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot \sin kx\, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{-\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{k}\,(\underbrace{-\cos k\pi}_{(-1)^k} + 1) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{8}{\pi}\frac{1}{k}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$ 4

$$\phi(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$ 2

$$\phi(0) = 0 \quad \left(= \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}\right)$$ 2

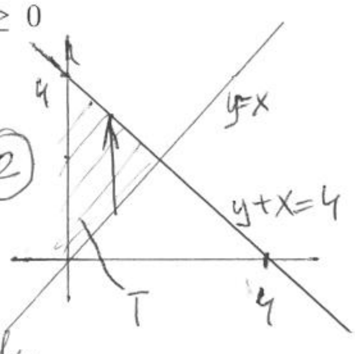
$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad \left(= f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right.$$: folytonossági hely) 1

6. feladat (16 pont)*

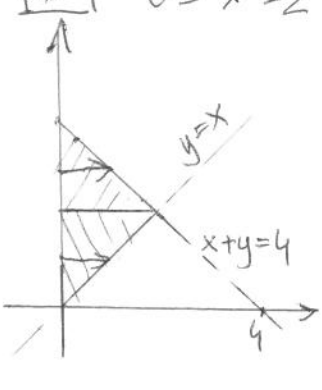
a) Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

$$\int_0^2 \int_x^{4-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

b) $\iint_T (x^2+y^2+1)^4\ \mathrm{d}T = ?$ $\qquad T:\ x^2+y^2 \le 9, \quad x \ge 0\,,\ y \ge 0$



a) $x \le y \le 4-x$
$\boxed{6}$ $0 \le x \le 2$



$$\iint_T f(x,y)\, dT =$$

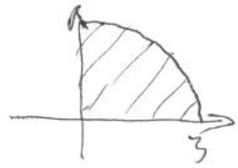
$$= \int_0^2 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^4 \int_0^{4-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

2 2

an2Xv-110110/4.

b.)

$\boxed{10}$ (2) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ |J| = r \end{cases}$ $\quad 0 \le r \le 3$, $\quad 0 \le \varphi \le \pi/2$ (2)



$$I_b = \int_0^3 \int_0^{\pi/2} (r^2+1)^4 r \, d\varphi \, dr = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \frac{1}{2} \int_0^3 \underbrace{2r}_{f'} \underbrace{(r^2+1)^4}_{f^4} dr =$$ (2)

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \, \frac{(r^2+1)^5}{5} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{20} \left(10^5 - 1\right)$$ (4)

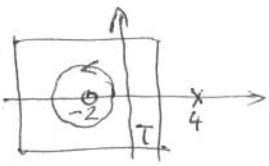
7. feladat (14 pont)*

Határozza meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

$$I_1 = \oint_{|z+2|=1} \frac{\operatorname{sh} jz}{(z-4)^2} \, dz \,, \qquad I_2 = \oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} jz}{(z-4)^2} \, dz$$

A felhasznált tételeket írja le!

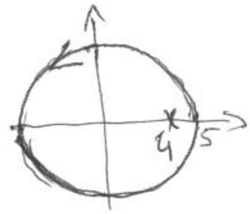
$$I_1 = \oint_{|z+2|=1} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} jz}{(z-4)^2}}_{\text{reg } T\text{-n}} dz = 0$$ (3) (Cauchy-f. alaptétel)



(T) T e.ö.f., $L \subset T$ zárt görbe, f reguláris T-n: (2)
$$\oint_L f(z) \, dz = 0$$

$$I_2 = \oint_{|z|=5} \frac{\overset{\text{reg}}{\operatorname{sh} jz}}{(z-4)^2} dz = \frac{2\pi j}{1!} (\operatorname{sh} jz)' \Big|_{z=4} =$$ (2)

$z_0 = 4$
$n = 1$



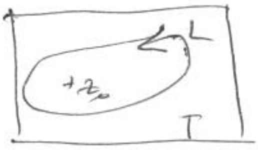
$$= 2\pi j \; j \operatorname{ch} j4 = -2\pi \cos 4$$ (2) (2)

$\operatorname{Re} I_2 = -2\pi \cos 4$; $\operatorname{Im} I_2 = 0$

(T)

(3) $$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Feltételek: $L \subset T$ e.ö.f. egyszer „körülfutja" a z_0 pontot, f reg T-n



A *-os feladatokból legalább 16 pontot kell elérni!

an2Xv110110/5.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+8x^2}$, $x_0 = 0$ b) $g(x) = \dfrac{1}{4+x}$, $x_0 = -2$

a) $f(x) = x \dfrac{1}{1-(-8x^2)} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-8x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-8)^n x^{2n+1}$

$|-8x^2| = 8|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt{8}}$ KT: $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$

b) $g(x) = \dfrac{1}{2+(x+2)} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1-\frac{-(x+2)}{2}} = \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{x+2}{2}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x+2)^n$

$\left|-\dfrac{x+2}{2}\right| = \dfrac{|x+2|}{2} < 1 \Rightarrow |x+2| < 2$ KT: $(-4, 0)$

9. feladat (9 pont)

$$f(x,y) = (2y-5)^4\, x^5 \,, \qquad P_0(1,3)$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$; $\operatorname{grad} f(P_0) = ?$

b) Írja fel a függvény $P_0(1,3)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

a.) $f'_x = (2y-5)^4\, 5x^4$ 1 $f'_y = 4(2y-5)^3 \cdot 2 \cdot x^5$ 2

$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\underline{i} + f'_y(P_0)\underline{j} = 5\underline{i} + 8\underline{j}$ 2

b.) $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ 2

$5(x-1) + 8(y-3) - (z-1) = 0$ 2

an1Xv-110110/6.