**1. feladat (8+12=20 pont)**
*a*) Ismertesse, és igazolja a rendőrelvet!
*b*) Határozza meg $\sqrt[n]{\dfrac{3^n+2^n}{n^2+3}}$ sorozat határértékét!

*Mo.* *a*) Tegyük fel, hogy $n \geq N$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a_n = \lim c_n = A$. Ekkor $\lim b_n = A$ **(2p)** , mert $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N_1$, hogy $n \geq N_1$ esetén $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$, és étezik olyan $N_2$, hogy $n \geq N_2$ esetén $A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon$, vagyis $n \geq N(\varepsilon) = \max(N, N_1, N_2)$ esetén $A-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A+\varepsilon$, vagyis $|b_n - A| < \varepsilon$. **(6p)** .

*b*) A rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+2^n}{n^2+3}} = 3$ **(2p)** , mert

$$3 \overset{\textbf{(2p)}}{\leftarrow} \frac{3}{\sqrt[n]{4}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4n^2}} \overset{\textbf{(2p)}}{\leq} \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n^2+3}} \overset{\textbf{(2p)}}{\leq} \sqrt[n]{\frac{2\cdot 3^n}{n^2}} \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{3\sqrt[n]{2}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \overset{\textbf{(1p)}}{\to} 3$$

---

**2. feladat (4+10=14 pont)**
*a*) Definiálja egy sorozat torlódási pontjait!
*b*) Adja meg az $a_n = \left(\dfrac{n+(-1)^n}{n+2}\right)^{n+3}$ sorozat torlódásai pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergens-e a sorozat?

*Mo.* *a*) Az $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ az $(a_n)$ sorozat torldási pontja, ha létezik olyan $(a_{n_k})$ részsorozat, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. **(4p)** (Vagy: ha $A$ minden környezetébe végtelen sok sorozatelem esik.)

*b*) Páros $n$ esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3 \to \frac{1}{e}, \qquad \textbf{(3p)}$$

páratlan $n$ esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+3} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^3 \to \frac{1}{e^3}, \qquad \textbf{(3p)}$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^3}\right\}$ **(1p)** , $\limsup a_n = \dfrac{1}{e}$ **(1p)** , $\liminf a_n = \dfrac{1}{e^3}$ **(1p)** , és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens **(1p)** .

---

**3. feladat (4+10=14 pont)**
*a*) Adjon szükséges feltételt arra, hogy egy differenciálható függvény egy intervallumon

invertálható!
*b*) Írja fel az $f(x) = -\pi + 2\arcsin(3-2x)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Igazolja, hogy $f$ invertálható a teljes értelmezési tartományán! Mi lesz az inverzfüggvény értelmezési tartománya, illetve értékkészlete?

---

*Mo.* *a*) Ha $f$ az $I$ intervallumon deriválható és invertálható, akkor $I$-n szigorúan monoton, így $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ esetén, vagy $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ esetén **(4p)** .
*b*) $-1 \leq 3-2x \leq 1$, vagyis $D_f = [1,2]$, **(2p)** és

$$R_f = \left[-\pi + 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right), -\pi + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right] = [-2\pi, 0] \qquad \textbf{(2p)}$$

.

$$f'(x) = \frac{2\cdot(-2)}{\sqrt{1-(3-2x)^2}} < 0, \qquad \textbf{(3p)}$$

tehát a függvény invertálható **(1p)** , és $D_{f^{-1}} = R_f = [-2\pi, 0]$ **(1p)** , $R_{f^{-1}} = D_f = [1,2]$ **(1p)** .

---

**4. feladat (4+12=16 pont)**
*a*) Ismertesse Weierstrass második tételét!
*b*) Határozza meg az $f(x) = x^2e^{-4x^2+6x+3}$ függvény minimumát, illetve maximumát a $[0,3]$ intervallumon!

---

*Mo.* *a*) Korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát **(4p)** .
*b*) A függvény differenciálható, így minimumát, illetve maximumát az intervallumba eső lokális szélsőértékhelyek valamelyikén, vagy az intervallum végpontjaiban veszi fel **(2p)** .

$$f'(x) = 2xe^{-4x^2+6x+3} + x^2(-8x+6)e^{-4x^2+6x+3} = -2x(4x^2-3x-1)e^{-4x^2+6x+3} = 0, \qquad \textbf{(3p)}$$

ha $x=0$, $x=1 \in [0,3]$, $x = -\frac{1}{4} \notin [0,3]$ **(3p)** , és $f(0) = 0 < f(3) = 9e^{-15} < f(1) = e^5$ **(3p)** , vagyis az intervallumon felvett minimum 0, a maximum pedig $e^5$. **(1p)**

---

**5. feladat (4+10=14 pont)***
*a*) Adja meg minden $\alpha \in \mathbb{R}$, és differenciálható $f$ függvény esetén az $f^\alpha(x)f'(x)$ függvény primitív függvényét!
*b*) Számolja ki az $f(x) = \cos^3 x + \dfrac{1}{(1+4x^2)\,\mathrm{arctg}(2x)}$ függvény primitív függvényét!

---

*Mo.* *a*) Ha $\alpha \neq -1$, akkor

$$\int f^{\alpha}(x)f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \qquad \textbf{(3p)}$$

$\alpha = -1$ esetén pedig $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ **(1p)**

*b*) $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$ **(2p)** , tehát

$$\int f(x)dx \overset{\textbf{(4p)}}{=} \int \cos x - (\sin x)' \sin^2 x + \frac{1}{2}\cdot\frac{(\operatorname{arctg}(2x))'}{\operatorname{arctg}(2x)}dx \overset{\textbf{(4p)}}{=}$$
$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{arctg}(2x)| + c$$

---

**6. feladat (10 pont)***
Számolja ki az alábbi integrált!

$$\int \operatorname{sh}(2x+1)\cos(3x-2)dx$$

---

*Mo.* Kétszeres parciális integrálással

$$I = \int \operatorname{sh}(2x+1)\cos(3x-2)dx \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{\operatorname{sh}(2x+1)\sin(3x-2)}{3} - \frac{2}{3}\int \operatorname{ch}(2x+1)\sin(3x-2)dx \overset{\textbf{(3p)}}{=}$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(2x+1)\sin(3x-2)}{3} + \frac{2\operatorname{ch}(2x+1)\cos(3x-2)}{9} - \frac{4}{9}\int \operatorname{sh}(2x+1)\cos(3x-2)dx \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(2x+1)\sin(3x-2)}{3} + \frac{2\operatorname{ch}(2x+1)\cos(3x-2)}{9} - \frac{4}{9}I$$

így

$$I = \frac{9}{13}\left(\frac{\operatorname{sh}(2x+1)\sin(3x-2)}{3} + \frac{2\operatorname{ch}(2x+1)\cos(3x-2)}{9}\right). \qquad \textbf{(2p)}$$

---

**7. feladat (6+6=12 pont)***
*a*) Ismertesse az integrálszámítás második alaptételét!
*b*) Számolja ki a $G(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \operatorname{th}\left(e^{\operatorname{arcctg}(3t)}\right) dt$ függvény deriváltját $x \geq 0$ esetén!

---

*Mo.* *a*) Minden $[a,b]$ intervallumon integrálható $f$ függvény esetén az $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon **(3p)** , és ha $f$ folytonos egy $x_0 \in [a,b]$ pontban, akkor ott $F$ differenciálható, és $F'(x_0) = f(x_0)$ **(3p)** .
*b*) Az $f(x) = \operatorname{th}\left(e^{\operatorname{arcctg}(3x)}\right)$ folytonos függvények kompozíciója, így az $F(x) = \int_0^x \operatorname{th}\left(e^{\operatorname{arcctg}(3t)}\right) dt$ függvény differenciálható, és $F'(x) = \operatorname{th}\left(e^{\operatorname{arcctg}(3x)}\right)$ **(3p)** .
$G(x) = F(2x)$, így $G'(x) = 2F'(2x) = 2\operatorname{th}\left(e^{\operatorname{arcctg}(6x)}\right)$ **(3p)** .

---

---

**IMSC feladat (14 IMSC pont)**
Jelölje $\{a\}$ az $a \in \mathbb{R}$ szám törtrészét, és legyen $f(x) = x \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\}$. Határozza meg a következő határértékeket!

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\right\}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} f(x); \qquad c)\ \lim_{x\to +\infty} f(x); \qquad d)\ \lim_{x\to -\infty} f(x).$$

---

*Mo.* *a*) Az átviteli elvvel igazolható, hogy a határérték nem létezik. Legyen $\forall k \in \mathbb{N}_+$ estén $x_k = \frac{1}{k}$ és $y_k = \frac{1}{k+1/2}$. Mindkét sorozat zérushoz tart, és $\left\{\frac{1}{x_k}\right\} = 0 \neq \left\{\frac{1}{x_k}\right\} = \frac{1}{2}$. **(4p)**

*b*) Mivel a törtrész függvény értékkészlete $[0,1)$ korlátos, és $\lim_{x\to 0} x = 0$ ezért $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. **(3p)**

*c*) Ha $x > 1$, akkor $\frac{1}{x} \in (0,1)$, így $\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x}$, tehát $f(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, és egyben ez a keresett határérték is. **(3p)**

*d*) Ha $x < -1$, akkor $\frac{1}{x} \in (-1,0)$, így $\left\{\frac{1}{x}\right\} = 1 + \frac{1}{x}$, tehát $f(x) = x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = x + 1 \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$. **(4p)**

---