Intro analízis 1, I. pótZH. (2012. okt. 27.) —1—

1, a, $\boxed{6p}$

$$\left(\frac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n^2+1} = \underbrace{\left(\frac{3+2/n^2}{3-1/n^2}\right)}_{\downarrow\ 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1+\frac{2/3}{n^2}}{1-\frac{1/3}{n^2}}\right)^{n^2}}_{\downarrow\ \frac{e^{2/3}}{e^{-1/3}}=e} \xrightarrow[\text{(4p)}]{n\to\infty} e \quad \text{(2p)}$$

($2/n^2 \to 0$, $1/n^2 \to 0$)

b, $\boxed{9p}$

$$\left(\frac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)}_{\downarrow\ 1\ \text{(1p)}}\cdot \sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n^2}}_{c_n \to 1,\ \text{mert:}}} \longrightarrow 1$$

Láttuk, hogy $c_n = \left(\frac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} e$, tehát $\varepsilon>0$ esetén

$$e-\varepsilon < c_n < e+\varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \text{(3p)}$$

$$\underset{\downarrow\ 1}{\sqrt[n]{e-\varepsilon}} < \sqrt[n]{c_n} < \underset{\downarrow\ 1}{\sqrt[n]{e+\varepsilon}}$$

Rendőr elv alapján $\sqrt[n]{c_n} \to 1$, így (3p) az egész sorozat határértéke 1. (2p)

$\boxed{6p}$ c,

$$\sqrt{3n^2-2n+1}-\sqrt{n^2+6n-3} = \frac{3n^2-2n+1-(n^2+6n-3)}{\sqrt{3n^2-2n+1}+\sqrt{n^2+6n-3}} \overset{\text{(2p)}}{=}$$

$$=\frac{2n^2-8n+4}{\sqrt{3n^2-2n+1}+\sqrt{n^2+6n-3}} = \frac{\overset{\to\infty}{2n}-8+\overset{\to 0}{4/n}}{\sqrt{3-\underbrace{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}_{\downarrow 0}}+\sqrt{1+\underbrace{\frac{6}{n}-\frac{3}{n^2}}_{\downarrow 0}}} \ \text{(2p)} \longrightarrow \infty \ \text{(2p)}$$

1\. d, $\boxed{7p}$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{3n^2-2n+1} < \sqrt[n]{4n^2} = \sqrt[n]{4}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 1$$

(4p)

$$\downarrow$$
$$1$$

$$1 = \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{n^2+6n-3} < \sqrt[n]{7n^2} \longrightarrow 1 \quad (2p)$$

Tehát a rendőr elv alapján mindkét gyök határértéke külön-külön 1. Így $\sqrt[n]{3n^2-2n+1} - \sqrt[n]{n^2+6n-3} \longrightarrow 1-1=0$. (1p)

2, a, $\boxed{3p}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$|A - a_n| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$. (3p)

b, $\boxed{8p}$

$$\left|\frac{3n^3+2n}{5+4n^3} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{\cancel{12n^3}+8n-15-\cancel{12n^3}}{4(5+4n^3)}\right| = \left|\frac{8n-15}{20+16n^3}\right| \underset{\text{ha } n\geq 2}{=}$$

(2p)

$$= \frac{8n-15}{16n^3+20} \leq \frac{8n}{16n^3} = \frac{1}{2n^2} < \varepsilon \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}$$

(2p) (2p)

$$N(\varepsilon) = \max\left\{3, \left[\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}\right]\right\} \quad (2p)$$

c, $\boxed{7p}$ Rendőr elvet használjuk. $\frac{3n^3+2n}{5+4n^3} \longrightarrow \frac{3}{4}$, tehát

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} < \frac{3n^3+2n}{5+4n^3} < \frac{7}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \quad \text{ha } n > N_0 = N\left(\frac{1}{8}\right)$$

(3p)

$$\left(\frac{5}{8}\right)^n < \left(\frac{3n^3+2n}{5+4n^3}\right)^n < \left(\frac{7}{8}\right)^n \quad (3p)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (1p)

3, a, Teljes indukcióval dolgozunk:

$\boxed{5p}$ i, $2 < a_1 = 4 < 6$ ✓

ii, T.f.h.: $2 < a_n < 6$

iii, Ekkor: $8 \cdot 2 < 8a_n < 8 \cdot 6$

$16 - 12 < 8a_n - 12 < 48 - 12$

$\sqrt{4} = 2 < \sqrt{8a_n - 12} = a_{n+1} < \sqrt{36} = 6$ ✓ (5p)

b, $a_1 = 4$, $a_2 = \sqrt{8 \cdot 4 - 12} = \sqrt{20} > 4$, azt sejtjük, hogy a_n monoton nő.

$\boxed{5p}$

Teljes indukcióval:

i, $a_1 = 4 < a_2 = \sqrt{20}$

ii, T.f.h. $a_n < a_{n+1}$ (És tudjuk, hogy $2 < a_n < a_{n+1} < 6$

iii, Ekkor $8 \cdot a_n - 12 < 8a_{n+1} - 12$ (mindkét oldal pozitív)

$\sqrt{8a_n - 12} = a_{n+1} < \sqrt{8a_{n+1} - 12} = a_{n+2}$ ✓ (5p)

c, a_n monoton nő, és felülről korlátos, így konvergens. (2p)

$\boxed{6p}$

$A = \lim_n a_n$ kielégíti a rekurziós egyenletet:

$A = \sqrt{8A - 12} \implies A^2 - 8A + 12 = (A-2)(A-6) = 0$

$\implies A_1 = 2$, $A_2 = 6$ lehet a határérték. (2p) Mivel $a_1 = 4$, és $a_n \nearrow$,

ezért $\lim_n a_n = 6$ (2p)

4, Ha n páros, akkor $(-8)^n = 8^n$, tehát

$\boxed{12p}$

$$a_n = \sqrt[n]{n^4 + 2 \cdot 8^n + 3 \cdot 3^n} = 8 \cdot \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n^4}{8^n} + 2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^n}_{b_n}} \longrightarrow 8$$

$b_n \to 2$, tehát $2 - \varepsilon < b_n < 2 + \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$, így

a rendőr elv alapján: $\sqrt[n]{2 - \varepsilon} < \sqrt[n]{b_n} < \sqrt[n]{2 + \varepsilon}$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

(4p)

4, (folyt.)

Ha n páratlan, $(-8)^n = -(8^n)$, tehát

$$a_n = \sqrt[n]{n^4 + 3\cdot 3^n} = 3\cdot \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n^4}{3^n} + 3}_{c_n}} \longrightarrow 3$$

Most $c_n \longrightarrow 3$, tehát $2 < c_n < 4$, ha $n > N_0$, és így

$$\underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{2}} < \sqrt[n]{c_n} < \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[n]{4}} \; ; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1.$$

(4p)

Torlódási pontok: 3, 8. (1p)

$\overline{\lim}\, a_n = 8$; $\underline{\lim}\, a_n = 3$; $3 \neq 8 \Rightarrow \nexists \lim_n a_n$ (3p)

5, a, Ha a_n váltakozó előjelű, $a_n \longrightarrow 0$, és $|a_n|$ monoton csökken, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. (3p)

$\boxed{15p}$

b, $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{3^n}$ váltakozó előjelű, $a_n \longrightarrow 0$. (3p) A monotonitást igazoljuk: $|a_n| = \frac{n}{3^n} \overset{?}{>} \frac{n+1}{3^{n+1}} = |a_{n+1}|$

$$\Updownarrow$$

$3n \overset{?}{>} n+1$

$2n \overset{?}{>} 1$ ✓

(5p) Tehát a sor konv.

Ha $n > 5$, akkor $|S - S_n| \leq |a_6| = \frac{6}{3^6} = \frac{6}{9\cdot 81} = \frac{2}{273} < \frac{1}{100}$ ✓ (4p)

6, Igazoljuk, hogy a sor abszolút konvergens. (1p) Majoráns krit.: (2p)

$\boxed{11p}$

$$\left|\frac{(-5)^{n+1} + 2^{3n-2}}{3^{2n} + n}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ |a+b| \leq |a|+|b|}}{\leq} \frac{5\cdot 5^n + \frac{1}{4}\cdot 8^n}{9^n + n} \leq \frac{\left(5+\frac{1}{4}\right)\cdot 8^n}{9^n}$$ (5p), és $\sum_n \left(\frac{8}{9}\right)^n < \infty$.

$\left(\left|\frac{8}{9}\right| < 1\right)$ (3p)

Mivel absz. konv., ezért konvergens is a sor.

7, $\boxed{8p}$

Mivel $n! >> a^n >> n^k$, ezért (3p)

$$a_n = \frac{n^{10} + 10^n + (n-1)!}{(n+1)! + 3^{2n}} = \frac{\underbrace{\frac{n^{10}}{n!}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{10^n}{n!}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}{(n+1) + \underbrace{\frac{9^n}{n!}}_{\to 0}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ (5p)

8, a, $\boxed{6p}$

$a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} \neq 0$, tehát nem teljesül a sor konvergenciájának szükséges feltétele $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens

b, $\boxed{6p}$

$b_n := \frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, tehát a majoráns kritérium értelmében $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens.