

Sztochasztika 2 félévizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak D

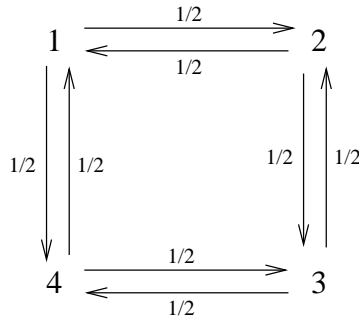
2014. június 5. 8:15. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat $6\frac{1}{4}$ pontot ér.

1. Becsülni szeretnénk a $\mathbb{P}(S_n \geq K)$ valószínűséget, ahol $K \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Alkalmazható-e a Hoeffding egyenlőtlenség, és alkalmazható-e a Cramér tétel (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? Miért?

- $n = 100$ -szor dobunk egy szabályos dobókockával és X_i -vel jelöljük az i -edik dobás eredményét.
 - 101-szer dobunk egy szabályos dobókockával és X_i -vel jelöljük az i -edik és $i + 1$ -edik dobás eredményének szorzatát ($i = 1, 2, \dots, n; n = 100$).
 - Addig dobálunk egy szabályos dobókockával, amíg ki nem jön a hatos. Ezt a kísérletet $n = 100$ -szor ismétljük, és X_i -vel jelöljük az i -edik kísérlet során a szükséges dobások számát.
 - 50-szer dobunk egy szabályos érmével, majd 50-szer egy hamissal, ahol a fej valószínűsége $\frac{6}{10}$, és X_i -vel jelöljük annak indikátorát, hogy az i -edik dobás fej. (Vagyis $X_i = 1$, ha az i -edik dobás fej, és $X_i = 0$, ha írás.) ($i = 1, 2, \dots, n; n = 100$).
2. Az alábbi ábra egy diszkrét idejű (időben homogén) Markov lánc lehetséges egylépéses átmeneteit mutatja, a hozzájuk tartozó átmenetvalószínűségekkel együtt.



- Írjuk fel a Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát!
 - Ha a Markov lánc kezdetben a 2 állapotban van, mi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a 3 állapotban találjuk?
3. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{ha } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{ha nem,} \end{cases}$$

ahol $\theta > 0$ ismeretlen paraméter. Az eloszlásból mintát vettünk, és azt kaptuk, hogy 0.34; 0.05; 0.92; 0.01; 0.32. Adjunk maximum likelihood becslést a θ paraméter értékére!

4. Egy vizsgán 24 hallgató vett részt. Az utolsó feladatra 3-an kaptak 1 pontot, 4-en 2-t, 6-an 3-at, 6-an 4-et, 3-an 5-öt és 2-en 6-ot. Vizsgáljuk meg 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy az oktató a pontszámokat kockadobással sorsolta.