Villamosmérnök A3 (2013 ősz) **3. vizsgazh ZH**

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $\frac{y''}{16} + y = 1 + t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével!

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát transzformálva (a kezdetiérték-feltételeket is figyelembe véve) $Y = \frac{16s+16}{s^2(s^2+16)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+16}$, amiből $1 = A = -C$ és $1 = B = -D$, azaz $Y = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2+16}$. Ezt visszatranszformálva $y = 1 + t - \cos 4t - \frac{1}{4}\sin 4t$.

2. Legyen L az origó középpontú, 1 sugarú, pozitívan irányított körvonal $\mathbb{R}^2$-ben, és $v(x, y) = (e^x - y^3, \cos y + x^3)$. $\int_L v\, dr = ?$

Megoldás. Stokes-tétel miatt $\int_L v\, dr = \iint_K \operatorname{rot} v\, dV = \iint_K 3x^2+3y^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(3r^2\cos^2\varphi + 3r^2\sin^2\varphi)\, dr d\varphi = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\, dr d\varphi = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} 1\, d r d\varphi = \frac{3}{2}\pi$, ahol K az L által határolt körlap.

VAGY:

$$
\begin{aligned}
r(t) = (\cos t, \sin t) &\leadsto \dot r(t) = (-\sin t, \cos t)\\
\leadsto \int_L v\, dr &= \int_0^{2\pi} (e^{\cos t} - \sin^3 t, \cos(\sin t) + \cos^3 t)(-\sin t, \cos t)\, dt\\
&= \int_0^{2\pi} -\sin t e^{\cos t} + \sin^4 t + \cos t \cos(\sin t) + \cos^4 t\, dt\\
&= e^{\cos t} + \sin(\sin t) + \frac{1}{4}(\cos^3 t \sin t - \sin^3 t \cos t) + \frac{3}{4}t\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

3. Számítsa ki a $\operatorname{div}(r\ln(|r|))$ értékét minden $0 \neq r \in \mathbb{R}^n$-re!

Megoldás. $\operatorname{div}(r\ln(|r|)) = \ln(|r|)\operatorname{div} r + r \operatorname{grad}\ln(|r|) = n\ln(|r|) + r\frac{r}{|r|^2} = n\ln(|r|) + 1$.

Használtuk, hogy $\operatorname{div} r = n$, hogy $\frac{d}{dx_i}\ln(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}) = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ és így $\operatorname{grad}\ln(|r|) = \frac{r}{|r|^2}$, és hogy $\operatorname{div}(uv) = u\operatorname{div} v + v\operatorname{grad} u$.

4. Legyen L az origó középpontú, 1 sugarú, pozitívan irányított körvonal a komplex síkon. $\int_L z^4 \sin\frac{1}{z}\, dz = ?$

Megoldás. sin Taylor-sorából $\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!} \leadsto z^4\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{z^{2n-3}(2n+1)!}$ ~ $\operatorname{Res}_0 z^4\sin\frac{1}{z} = 1/5!$, tehát a reziduum-tétel miatt $\int_L z^4\sin\frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{5!}\cdot 2\pi i = \frac{\pi i}{60}$.

5. 3 (a) Mit értünk azon, hogy az f komplex függvény reguláris a z_0 pontban?

3 (b) Legyen z_0 f komplex függvény izolált szingularitási helye. Mikor mondjuk, hogy f-nek lényeges szingularitása van z_0-ban?

4 (c) Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mindenütt folytonosan deriválható függvény. Melyek igazak a következő állítások közül?

2 (c1) $\operatorname{rot} v$ a v mátrixának vektorinvariánsa

2 (c2) $\operatorname{rot} v$ a v komponensei parciális deriváltjainak összege

2 (c3) $\operatorname{rot} v$ a v Jacobi-mátrixának skalárinvariánsa.

Megoldás. (a) f reguláris z_0-ban, ha z_0-nak van olyan környezete, melyen f deriválható.
(b) Ha f z_0 körüli Laurent-sorában végtelen sok negatív kitevőjű tag van.
(c1) Nem, v-nek (általában) nincs mátrixa.
(c2) Nem, pl. mert $\operatorname{rot} v$ vektor, nem skalár.
(c3) Nem, pl. mert $\operatorname{rot} v$ vektor, nem skalár.