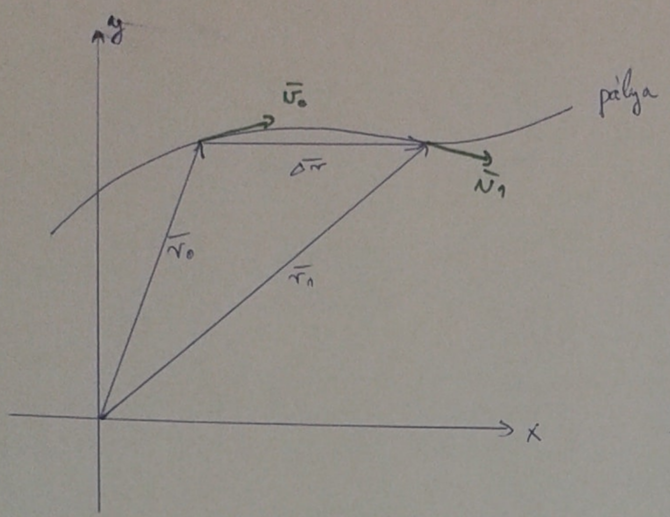
1.

tömegpont általános síkbeli mozgása



$\underline{r}$: helyvektor, origóból a testhez ~~...~~ mutató vektor

$\underline{\Delta \bar{r}}$: elmozdulásvektor kezdőállapotból a végállapotba mutató vektor $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$

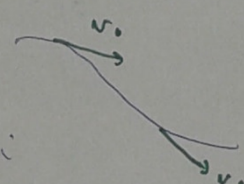
<u>pálya</u>: a test által befutott görbe

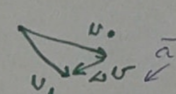
<u>út</u>: a befutott út hossza

$\bar{v}$: sebességvektor, $\underline{r}$ ~~...~~ időbeli változása

$\bar{v} = \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ Ha $\Delta t \to 0$, akkor a sebesség a pálya érintőjének irányába mutat

$\bar{a}$: gyorsulás, $\bar{a} = \dfrac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$





$\bar{a} = \dfrac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$

Kapcsolatukat leíró kinematikai egyenletek:

$v = \dfrac{\Delta r}{\Delta t} \to v(t) = \overset{\text{derivált}}{r'(t)}$

$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \to a(t) = r''(t) = v'(t)$

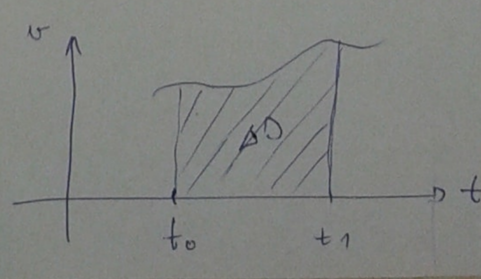
integrálás: ← deriválás fordítottja

$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$ ← görbe alatti területek

$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$

A sebességváltozás adott intervallumon az $a(t)$ függvény görbe alatti területe

A megtett út adott intervallumon a $v(t)$ függvény görbe alatti területe



2.

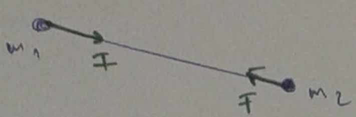
Newton-féle gravitációs törvény:

Bármely két pontszerű test között ható vonzóerő nagysága:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

γ: gravitációs állandó

$\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\, N \frac{m^2}{kg^2}$



m_1, m_2: testek tömegei

r: távolság

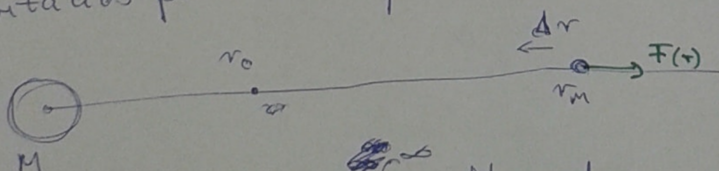
Potenciális energia

Konzervatív erőterekben két pont közötti munkavégzés nem függ az úttól, csak a két pont helyétől. Így a tér pontjaihoz potenciális energiát rendelhetünk, ami megmutatja, mekkora munkavégzés során tudunk oda eljutni.

Ki kell jelölni egy pontot adott energiaszinttel, és ez után már ~~kön~~ számolhatjuk a tér pontjainak potenciálját.

A gravitációs térben a végtelen távoli pontot vesszük 0 potenciáljának.

Gravitációs potenciál képlete:



A végzett munka negatív, mert a két vektor ellentétes irányú

$$E_p = \sum_i F(r)\cdot dr = \int_{r_0}^{\infty} -\gamma \frac{Mm}{r^2}\cdot dr = -\gamma M m \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty}$$

$$E_p = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

Amennyiben a földfelszín közelében vagyunk, az erő állandónak tekinthető, a magasság függvényében a helyzeti energia lineáris, $\Delta E_h = mg\cdot h$

3.

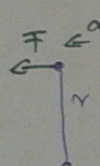
A forgó mozgás alapegyenlete:

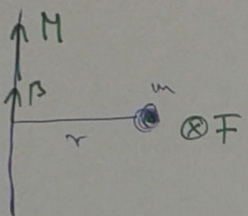
$$\sum \bar{M} = \Theta \cdot \bar{\beta}$$

A testre ható forgatónyomatékok vektori eredője arányos a test szöggyorsulásával, az arányossági tényező a test tehetetlenségi nyomatéka.

Egyetlen tömegpontra:

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$





jelen esetben $\Theta = m \cdot r^2$

Hasson rá egy érintő irányú F erő.

Ekkor $M = F \cdot r$

A test gyorsulása Newton II. tétele alapján:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow \beta = \frac{a}{r} = \frac{F}{m \cdot r}$$

$$\Theta \cdot \beta = m r^2 \cdot \frac{F}{m r} = F r = M$$ Ezzel igazoltuk.

Szimmetrikus test szimmetriatengelye körül

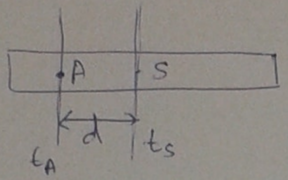
Ez esetben a tömegközéppont rajta van a forgástengelyen

$$\sum \bar{M} = \Theta_{TKP} \cdot \bar{\beta}$$

tömegközéppontra számított Θ.

4.

Steiner-tétel



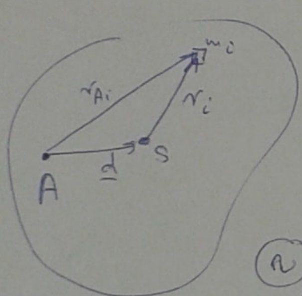
$$\Theta_A = \Theta_S + md^2$$

Θ_S a súlyponton, Θ_A egy tetszőleges A ponton áthaladó tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték. Ha a két tengely párhuzamos, távolságuk d, akkor fennáll $\Theta_A = \Theta_S + md^2$ összefüggés

Igazolás

tengelyek felülnézetből:

$$\Theta_A = \sum_i m_i r_{Ai}^2$$



$$r_{Ai}^2 = \bar{r}_{Ai} \cdot \bar{r}_{Ai} =$$ önmagával vett skalár szorzás

$$= (\underline{d} + \underline{r}_i)(\underline{d} + \underline{r}_i) = d^2 + 2\underline{d} \cdot \underline{r}_i + r_i^2$$

$$\Theta_A = \sum_i m_i (d^2 + 2\underline{d} \cdot \underline{r}_i + r_i^2) =$$

$$\sum_i m_i d^2 + \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i m_i 2\underline{d} \cdot \underline{r}_i = m \cdot d^2 + \Theta_S + \sum_i 2\underline{d} \cdot (m_i \bar{r}_i)$$

A tömegközéppont definíciója alapján:

$$\underline{S} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{m}$$

Mivel a TKP-ban vagyunk $\underline{S} = 0 \Rightarrow$

$\sum_i m_i \cdot \bar{r}_i = 0 \Rightarrow$

$\sum_i 2\underline{d} \cdot (m_i \bar{r}_i) = 0$

Azaz $\Theta_A = md^2 + \Theta_S$

5. Munkatétel

Egy testen a külső erők által végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával.

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \sum_i W_{külső}$$

* külső erő = testre ható erő, de ha rendszerre írjuk fel, akkor jobb, ha külső erő van írva.

X irányba egyenletesen gyorsuló test kinematikai egyenletei:

$a = áll$

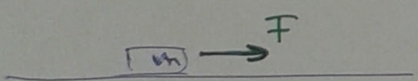
$v(t) = \int a(t)\,dt = a \cdot t + v_0$ Egyszerű integrálok

$s(t) = \int v(t)\,dt = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0$

Munkatétel levezetése:

F = állandó húzóerő

$F = m \cdot a$



Vizsgáljuk a mozgást $t_1 \to t_2$ idő intervallumon.

$$W = F \cdot \Delta s = F s_2 - F s_1 = F\left(\frac{a}{2} t_2^2 + v_0 t_2 - \frac{a}{2} t_1^2 - v_0 t_1\right)$$

$$W = F\left(\frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) + v_0 (t_2 - t_1)\right)$$

Nézzük meg $A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$ értéket:

$$A = \frac{1}{2} m (a t_2 + v_0)^2 - \frac{1}{2} m (a t_1 + v_0)^2 = \frac{1}{2} m a^2 (t_2^2 - t_1^2)$$

$$+ m a (t_2 - t_1) + \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2}$$

$F = m \cdot a \Rightarrow$ a két érték pont egyenlő, azaz $W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

Egyszerűbben: legyen $v_0 = 0$, $s_0 = 0 \to v_1 = 0$

$F = m \cdot a$ $\quad W = F \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{a}{2} t^2$

$v_2 = a \cdot t$ $\quad \left.\begin{array}{l} \\ \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m a^2 t^2 \end{array}\right\}$ egyenlő

6.

A környezetétől elszigetelt rendszer teljes energiája állandó marad.

Munkatétel alapján: $\Delta E_{kin} = W_{külső}$

amennyiben nincsen külső erő, $W_k = 0 \Rightarrow \Delta E_{kin} = 0$

A rendszerben részt vevő testek energiájá külön-külön változhat, de a hatás-ellenhatás törvénye alapján ezek kiegyenlítik egymást.

Potenciális-energia függvény

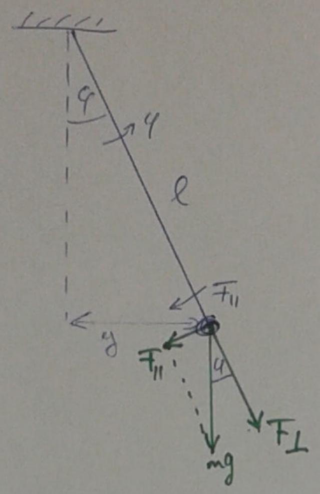
$$\int_{r_0}^{r} F\,dr = V(r_0) - V(r)$$

a függvény: $V(r) = V(r_0) - \int_{r_0}^{r} F\,dr$

Amennyiben ~~nincsen~~ külső erő, az erők párosával lépnek fel. (Newton III.) Ezek mind belső erők, a potenciális energia ~~helyzetivé a~~ kinetikussá alakul, de az energiamegmaradás alapján az ~~az~~ energiák összege állandó lesz

$E = V(x) + \frac{1}{2} m v^2 = áll$, így a rendszer energiája nem fog megváltozni.

7. Fonálinga



mg-t a mozgás irányával párhuzamos komponensre és merőleges komponensre bontjuk.

Így a test szöggyorsulása:

$$\beta = \frac{a}{l} = \frac{F_\parallel}{m \cdot l}$$

$$F_\parallel = -mg \sin \varphi$$

$$\beta = \frac{-mg}{ml} \sin \varphi = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi$$

Kis szögek esetén $\varphi \approx \sin \varphi$

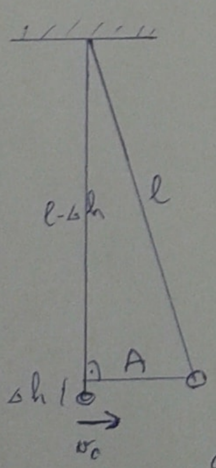
$$\beta = -\frac{g}{l} \cdot \cancel{\sin} \varphi \qquad \text{vagy} \qquad a = -\frac{g}{l} \cdot y$$

$$a = \beta \cdot R \qquad y = \varphi \cdot R$$

$$a(t) = -\frac{g}{l} \cdot y(t) \qquad a(t) = y''(t) \quad \text{differenciál egyenlet}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad \text{ahol } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

v_0-tól független ω, A-t energia-megmaradásból számolhatjuk



$$\Delta E_{helyzeti} + \Delta E_{kin} = 0$$

$$mg\Delta h - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

$$\Delta h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Pithagorasz-tétel: $A^2 + (l - \Delta h)^2 = l^2$

ha $\Delta h \ll l$ (márpedig kicsi a kitérés)

alkalmazzuk $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$ közelítést

$$\Rightarrow A^2 + l^2 - 2l\Delta h = l^2$$

$$A^2 = 2l\Delta h = 2l \cdot \frac{v_0^2}{2g} = \frac{l}{g} v_0^2$$

$$A = \sqrt{\frac{l}{g} v_0^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{\frac{l}{g} v_0^2} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) \qquad \text{itt } \varphi_0 = 0 \text{, mert } y(0) = 0$$

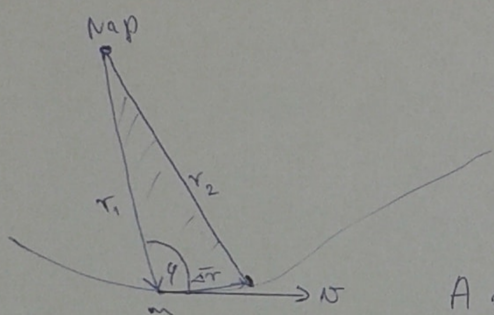
8]

Kepler II. törvénye:

A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol.

Biz:

A bolygóra csak centrális erő hat (gravitációs vonzóerő) így igaz lesz a perdület megmaradás.



Vegyünk fel 2 állapotot Δt idővel egymás után

$r_1 \approx r_2$

$\underline{\Delta r} = \underline{r_2} - \underline{r_1}$ $\qquad \Delta r = v \cdot \Delta t$

A súrolt terület:

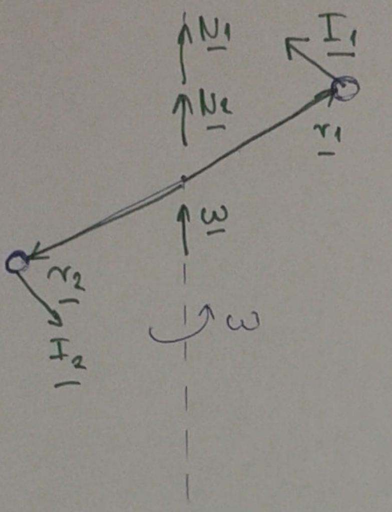
$$A = \frac{r_1 \cdot \Delta r \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{r_1 \cdot v \cdot \Delta t \cdot \sin\varphi}{2}$$

a területi sebesség: $\dot{A} = \frac{A}{\Delta t} = \frac{r_1 \cdot v \cdot \sin\varphi}{2}$

A test perdülete pedig $N = m \cdot v \cdot r_1 \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow \dot{A} = \frac{N}{2m} =$ állandó azaz a területi sebesség állandó $\rightarrow$ igaz a tétel

9/



perdületvektor:

$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{I_1} = m \cdot (\underline{r} \times \underline{v})$$

~~megváltozása~~?

A perdületvektor nem változik meg (perdületmegmaradás)

A perdület kiszámítása jelen esetben:

$$N = 2 \cdot \underbrace{m \cdot r \cdot v}_{\text{egy testté}}$$

Nem értem, mit akar ezen átrajzolni

10,

Merev test forgó mozgása:

~~kinematikai mennyiségek~~

kinematikai mennyiségek

analógia:

				mértékegység
s	$\rightarrow$	φ	szögelfordulás	rad
v	$\rightarrow$	ω	szögsebesség	$\frac{1}{s}$
a	$\rightarrow$	β	szöggyorsulás	$\frac{1}{s^2}$

Kapcsolatok

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \omega(t) = \varphi'(t)$$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \beta(t) = \omega'(t) = \varphi''(t)$$

illetve

$$\omega = \int \beta \, dt$$

$$\varphi = \int \omega(t) \, dt$$

ha $\beta = \text{állandó} = \beta_0 \Rightarrow \omega = \beta_0 t + \omega_0$

$$\varphi = \frac{\beta_0}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

~~12~~ 11.

Tömegpontrendszer mozgási energiája a tömegpontok mozgási energiáinak összege

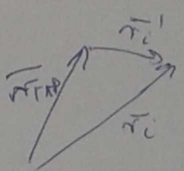
$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

A mozgási energia tömegközépponti rendszerben:

K' a TKP-hez rögzített koordináta rendszer

$$\bar{r}_i = \bar{r}_{TKP} + \bar{r}_i'$$

új helyvektor



deriválva

$$\underline{v}_i = \underline{v}_{TKP} + \underline{v}_i'$$

$$E_{m_i} = \frac{1}{2} m_i \left(\underline{v}_{TKP} + \underline{v}_i' \right) = \frac{1}{2} m_i \left(\underline{v}_{TKP}^2 + \underline{v}_i'^2 + 2\, \underline{v}_{TKP} \cdot \underline{v}_i' \right)$$

kibontva

$$E_m = \sum_i E_{m_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{v}_{TKP}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i'^2 + \sum_i m_i \underline{v}_{TKP} \cdot \underline{v}_i'$$

$$E_m = E_m' + \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 + \sum_i m_i \underline{v}_{TKP} \cdot \underline{v}_i'$$

TKP rendszerben a mozgási energia

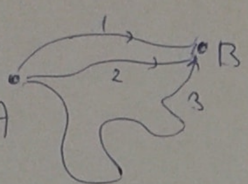
összes tömeg

Ez a kapcsolat, ennél többet az előadás jegyzet sem ír

12.

Konzervatív erő / erőtér:

Olyan erőtér, ahol egy testen a munkavégzés csak az elmozdulástól függ, a befutott úttól nem.
A konzervatív erőtérben fellépő erők a konzervatív erők



$$W_1 = W_2 = W_3$$

vagy $\int_A^B F(x)\,dx$ = konstans, nem függ az út alakjától.

→ Konzervatív erő térben ~~bef~~ bevezethető a potenciális energia:

$$V(x) = V(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

Egy adott kijelölt x_0 ponttól mekkora munkavégzéssel tudok x-be jutni. Az úttól nem függ a munkavégzés

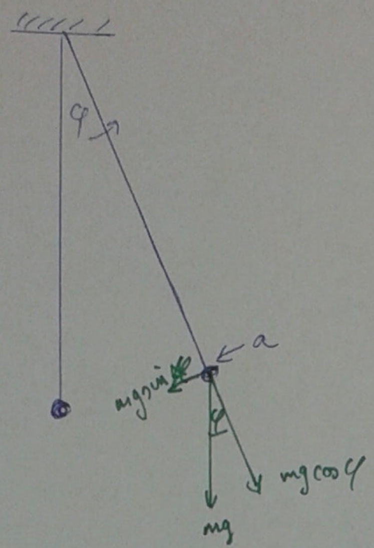
Egydimenziós potenciális-energia függvényből.

$$V(x) = V(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$ deriváljuk:

$$V'(x) = 0 + F(x)$$

Azaz a konzervatív erő x pontban egyenlő a potenciális-energia deriváltjával. (x szerint)

13.



(ez már volt a 7-esben)

kis szögekre

$$\beta = - \cancel{\tfrac{g}{g}} \frac{g}{l} \cdot \varphi$$

$$\beta = \frac{-mg\varphi}{ml} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Mozgásegyenlet: differenciál egyenlet alakban

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{l}\varphi(t)$$

mivel ugye $\beta = \varphi''(t)$

Egy lehetséges megoldás: $\varphi(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\varphi'(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\varphi''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Így

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{g}{l} \cdot A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

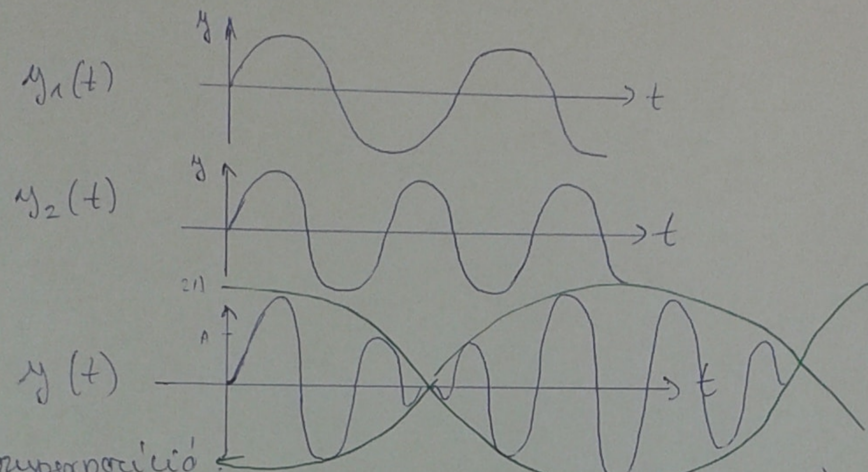
14.

Legyen f_1, f_2 a frekvenciák

hullámegyenletek: itt csak az időfüggést kérdezi

$\omega_1 = 2\pi \cdot f_1$ $\quad y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t)$ $\quad$ Legyen $A_1 = A_2$

$\omega_2 = 2\pi f_2$ $\quad y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t)$



az ábrázolás hozzávetőleges

szuperpozíció

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) =$$

$$2A\left[\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right]$$

eredő amplitúdó

frekvenciák számtani közepe

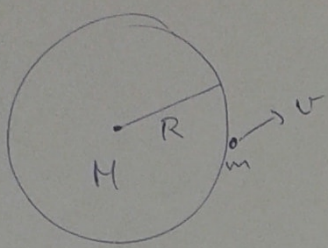
$$f_e = \frac{f_1+f_2}{2}$$

lebegés amplitúdója 2A

Lebegés akkor lép fel, ha $f_1 \approx f_2$, ekkor $\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ olyan kicsi is lehet, hogy halljuk „lebegni" a hangot. A lebegés frekvenciája $f = |f_1 - f_2|$, ami úgy jön, hogy $\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$ a burkoló felület, $\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \rightarrow \frac{f_1-f_2}{2}$, de 2-vel szorozhatjuk, mert az ábrán látható módon alul-felül korlátot szab az A amplitúdónak

15./ R, M

itt gondolom kötési energiára arra gondol, hogy ~~?~~ mekkora energiájú test tudja elhagyni a bolygót.



Írjuk fel az energia megmaradást erre az állapotra, és a végtelen távoli pontban lévő pontra

$$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{R} = \underset{\text{mozgási}}{0} + \underset{\text{helyzet}}{0}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \gamma \frac{Mm}{R}$$

Azaz a kötési energia: $\gamma \frac{Mm}{R}$

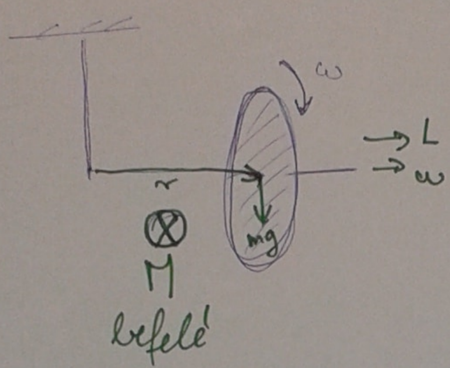
~~I. rész~~ Szökési sebesség: azon sebesség, amivel a test el tudja hagyni a bolygót. Előző képlet alapján: (energia-megmaradás)

$$\frac{1}{2} m v^2 = \gamma \frac{Mm}{R}$$

$$v^2 = 2 \frac{\gamma M}{R}$$

$$v_{szökési} = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{R}}$$

16. / Pörgettyű vízszintes tengellyel



ω: szögsebesség

L: perdület (vektor)

mg: súlyerő

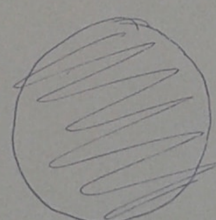
M: forgatónyomaték (vektor)

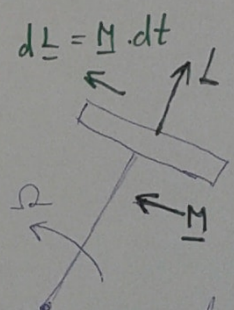
$$\underline{M} = \underline{r} \times m\underline{g}$$

A precesszió jelensége:

Mozgástörvény $\underline{M} \cdot dt = d\underline{L}$

felülnézetből:





Egyenletek:

a rendszer forogni fog Ω szögsebességgel, ~~mert M állandó~~

~~$\frac{dL}{dt}$ állandó → egyenletes körmozgás lesz~~

$$\underline{M} = \frac{d\underline{L}}{dt} = \frac{d(\Theta \cdot \underline{\omega})}{dt} = \Theta \beta$$

(ez nem annyira fontos)

Precessziós szögsebesség:

$$\underline{M} = \underline{\Omega} \times \underline{L}$$

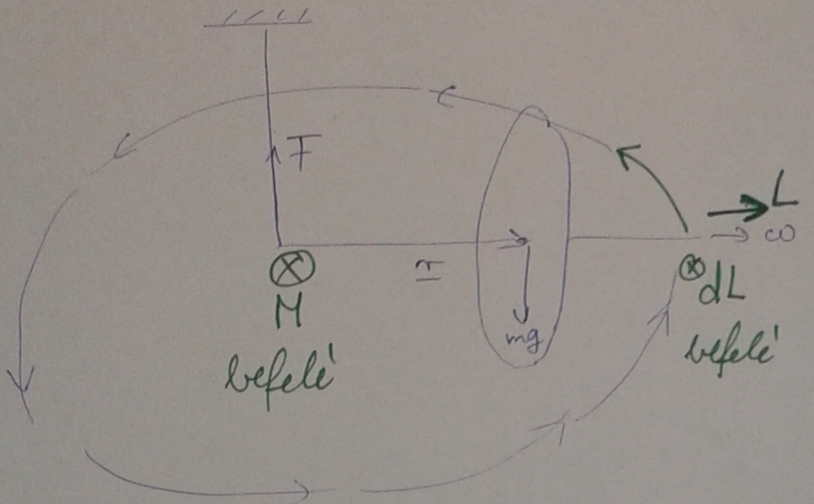
Ez a képlet itt merőlegesek páronként a vektorok, így skalárra váltva:

$$mgr = \Omega \cdot \Theta \cdot \omega$$

$$\Omega = \frac{mgr}{\Theta \omega}$$ Ez a precessziós szögsebesség

17.

Ha forog



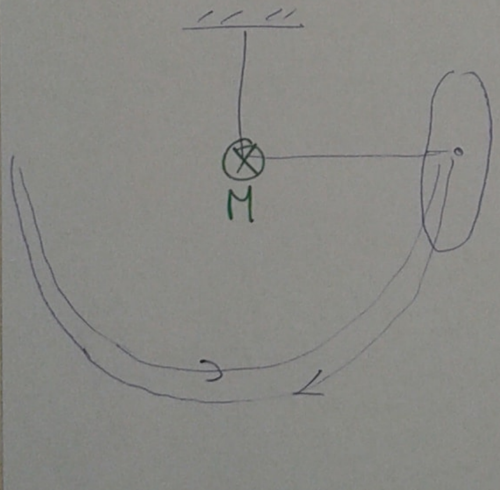
Mivel $dL = M\,dt$

A kerék felülnézetből pozitív irányba forog

A tömegközéppont pályája vízszintes síkú körpálya

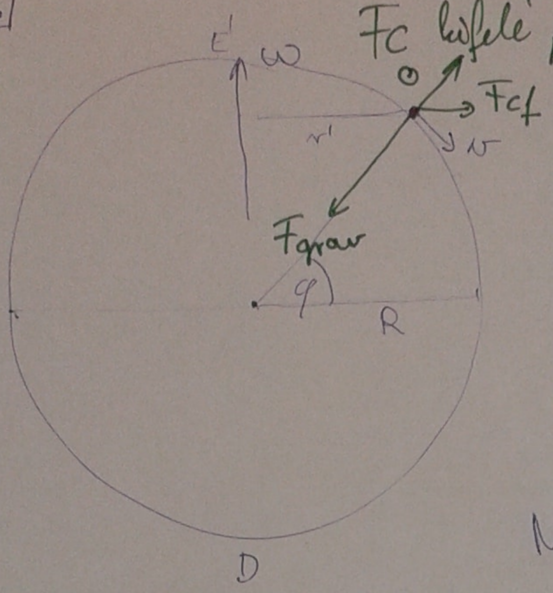
Forgatónyomaték: $\underline{M} = \underline{r} \times m\underline{g}$, perdület - forgatónyomaték kapcsolata: $d\underline{L} = \underline{M}\,dt$

Ha nem forog a kerék



Ekkor a test egyszerűen ingamozgást végez

18.



N: tartóerő

$$F_{grav} = \gamma \frac{Mm}{R^2}$$

a két tehetetlenségi erő:

- centrifugális erő:

$$F_{cf} = -m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

Nagysága jelen esetben

$$F_{cf} = m\,\omega^2 r'$$

- coriolis erő

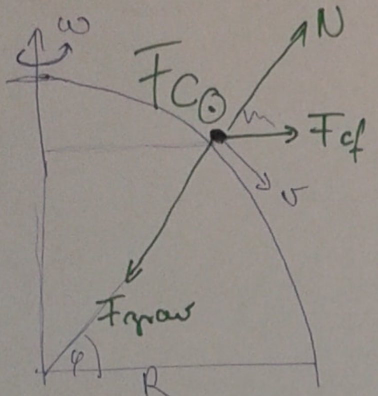
$$F_c = -2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}$$

nagysága:

$$F_c = 2m\,\omega v \cdot \cancel{\cos\varphi}\ \sin\varphi$$

Itt a centrifugális erő és a coriolis erő képletét érdemes megjegyezni.

19/ minta azonos a ~~20~~ 18-assal



F_c kifelé mutat.

N: föld által kifejtett nyomóerő

Centrifugális erő:

$$\overline{F}_{cf} = -m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

jelen esetben

$$|\overline{F}_{cf}| = m\,\omega^2 R \cdot \cos\varphi$$

Coriolis erő:

$$\overline{F}_c = -2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}$$

$$|\overline{F}_c| = 2m\,\omega\,v \cdot \sin\varphi$$

20.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + Dx = 0$$

k csillapítási tényező

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \qquad 2\beta = \frac{k}{m}$$

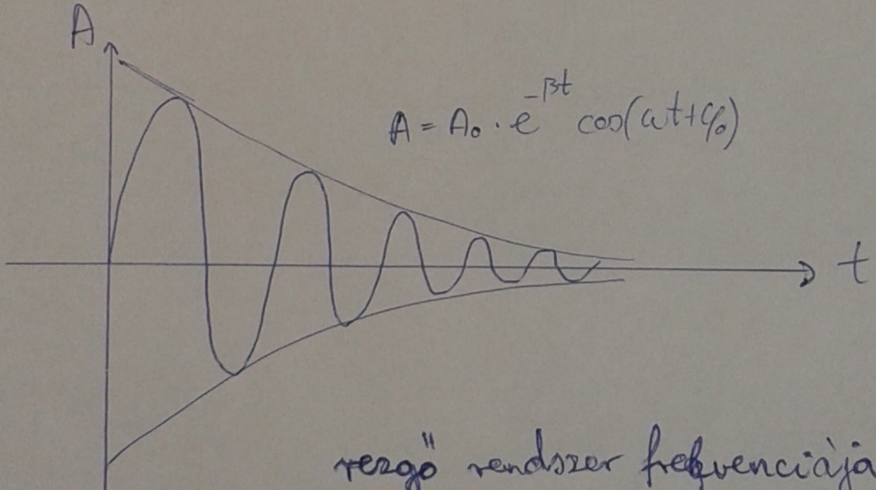
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dm} + \omega_0^2 x = 0$$

kis csillapítás esetén $x_{(t)} = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

„kis csillapítás" feltétele:

$\boxed{\omega_0 > \beta}$ akkor valós ω értéke



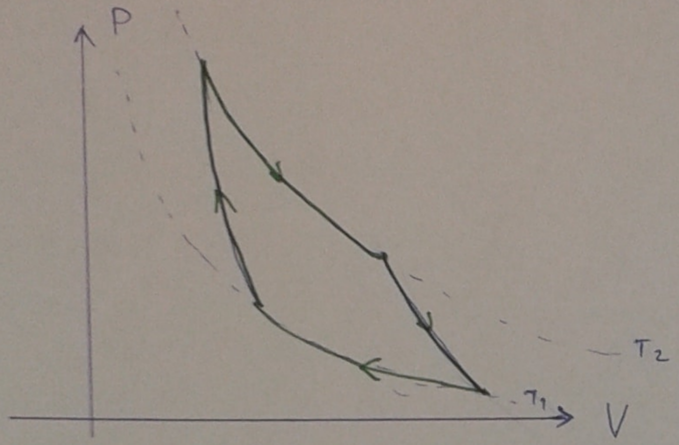
rezgő rendszer frekvenciája:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi}$$

21.

Carnot körfolyamat

Azon termodinamikai körfolyamat, amely során a gázt 2 adiabatán és 2 izotermán vezetjük.



Carnot-hőerőgép hatásfoka:

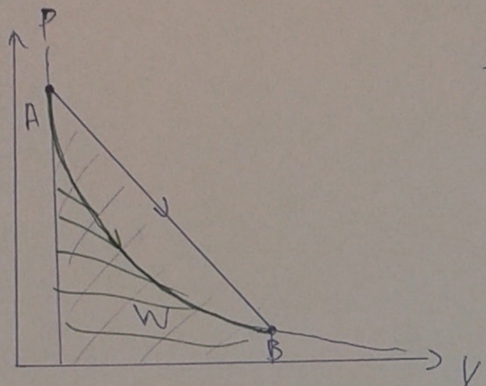
$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

(levezetést nem kéri)

22.

$f=3$ - egyatomos gáz

A kezdeti és végső hőmérséklet azonos ⇒ ugyanazon az izotermán van.



tágulási munka: görbe alatti terület

$$W=\frac{p_A+p_B}{2}(V_B-V_A)$$

(trapéz területe)

izoterm tágulás $A\to B$

$$W_i=\int_{V_A}^{V_B} p(V)\,dV=\int_{V_A}^{V_B}\frac{p_AV_A}{V}\,dV=p_AV_A\cdot\ln\frac{V_B}{V_A}$$

$pV=$ állandó $\quad p_AV_A=pV \rightarrow p(V)=\frac{p_AV_A}{V}$

Ez a munka leolvasható, hogy kisebb, mint a lineáris $p(V)$ függvény szerinti tágulási munka.

23.

A termodinamika első főtételét kell alkalmazni

$$\Delta E = Q + W$$

Adiabatikus folyamatnál $Q = 0$

$\Rightarrow$ $\Delta E = -W_{\text{gáz által}}$

$$\Delta\left(\frac{f}{2}pV\right) = -p\cdot\Delta V$$

belső energia differenciális alakja egyszerűbben

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p dV$$

$$\frac{f}{2}p\Delta V + \frac{f}{2}\Delta p V = -p\Delta V$$

$$\frac{f+2}{2}p\Delta V = -\frac{f}{2}\Delta p V$$

$$\frac{f+2}{f}\frac{p\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{p}$$

integrálva a két oldalt

$$\frac{f+2}{f}\ln V = -\ln p + C$$

$$\ln V^{\frac{f+2}{2}} + \ln p = C$$

$$\ln p\cdot V^{\frac{f+2}{2}} = C$$

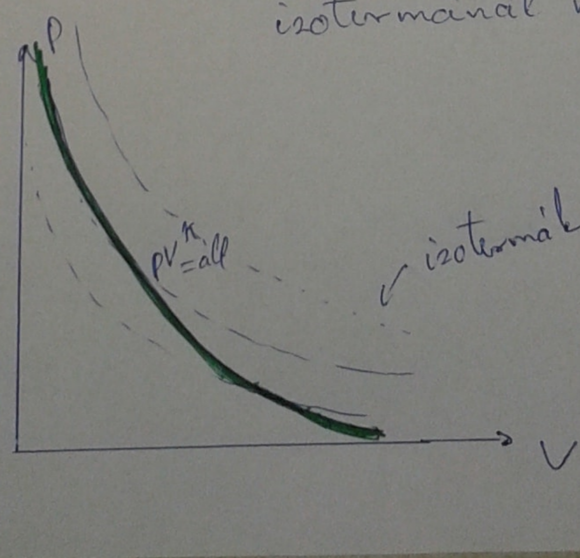
$$\Downarrow$$

$$p\cdot V^{\frac{f+2}{2}} = \text{állandó}$$

$$\kappa = \frac{f+2}{2}$$

izotermánál meredekebb

Ábrázolva:



24., 25.

Ekvipartíció tétele:

Minden szabadsági fokra $\varepsilon = \frac{1}{2}kT$ energia jut,
A gázmolekulák energiája egyenletesen oszlik el a szabadsági fokokra. Egy molekula energiája: $f \cdot \frac{1}{2}kT$

Így az egyatomos gáz belső energiája:

$$E_b = \underbrace{N}_{\text{molekulák száma}} \cdot \underbrace{3}_{f} \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}NkT$$

Belső energia differenciális alakja:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p dV$$

érthetőbben:

$$dE = \frac{f}{2}(V \cdot \Delta p + p \cdot \Delta V)$$

Ha V=állandó $\quad p \cdot \Delta V = 0$

$$dE = \frac{f}{2} V \Delta p$$

itt $W_{gáz} = 0$, hiszen V=áll

Hőtan I. főtétel $\quad dE = Q - W_{gáz}$

$$dE = Q$$

$$\frac{f}{2} V \Delta p = C_v \cdot n \cdot \Delta T$$

↑ mólhő

állapot egyenlet: $\quad pV = nRT$

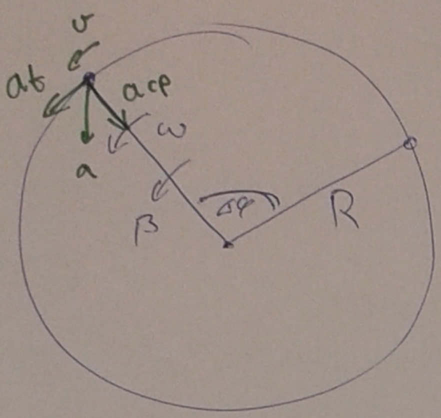
ha V állandó $\quad V\Delta p = nR\Delta T$

$$\left.\right\} \frac{f}{2} nR\Delta T = C_v n \Delta T$$

$$\boxed{\frac{f}{2} R = C_v}$$

26., 27.

Körmozgás kinematikai ~~feltételei~~ mennyiségei



$\Delta\varphi$: szögelfordulás

ω : szögsebesség

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \varphi'(t)$$

β : szöggyorsulás

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \beta = \omega'(t)$$

(Magyarázó ábrára nem tudom, mi kellene több)

a_{cp} : centripetális gyorsulás $\quad a_{cp} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$

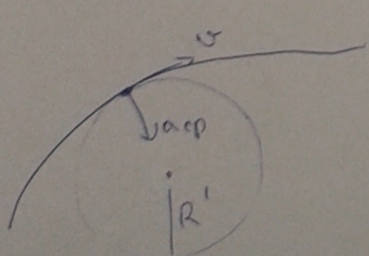
a_t : tangenciális gyorsulás $\quad a_t = \beta \cdot t$

v : kerületi sebesség $\quad v = R \cdot \omega$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \quad \bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_{cp}$

Síkbeli görbevonalú mozgások:

Egy adott pillanatban a görbe vonalú mozgás esetén képzelhetjük úgy a testet, mintha körpályán mozogna.



A pályához írt kör sugara azon kör sugara, amin mozogna, ha ~~a~~ csak a pályára merőleges gyorsulás komponens maradna meg.

Így a ~~k~~ pályához írt kör sugara:

$$R' = \frac{v^2}{a_{cp}}$$

gyorsulásvektor sebességre merőleges komponense

28,

Az impulzusmomentum: (perdület)

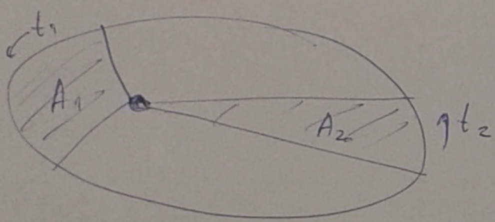
$$\bar{N} = \underline{r} \times \underline{p}$$

Felületi tétel:

A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idő alatt egyenlő utakat tesz meg.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{állandó}$$

$$\frac{A_1}{t_1} = \frac{A_2}{t_2}$$



A felületi tétel az impulzusmomentum megmaradásból következik

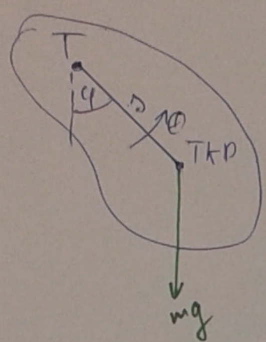
A két fogalom összetevődik bolygómozgás során.

A,

Centrális erőtérben a testek perdülete megmarad, mert a tengelyre $\sum M = 0$

29.)

Fizikai inga



$$M = -mgs \cdot \sin\varphi$$

Forgó mozgás alapegyenlete:

$$M = \Theta_T \cdot \beta$$

$$\left[-mgs \sin\varphi = \Theta_T \cdot \beta \right]$$

kis szögekre: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$-mgs\, \varphi(t) = \Theta_T \cdot \varphi''(t)$$

$$-\frac{mgs}{\Theta_T}\varphi(t) = \varphi''(t) \quad \rightarrow \quad \varphi(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{mgs}{\Theta_T} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta_T}}$$

Ha függőleges helyzetből ω_0 kezdősebességgel indítunk:

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$\omega(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \qquad \omega(0) = A \cdot \omega \cdot 1$$

$$A = \frac{\omega(0)}{\omega} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{mgs}{\Theta_t}}}$$

Azaz

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{\Theta_T}{mgs}} \cdot \omega_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mgs}{\Theta_T}}\, t\right)$$

(Megjegyzés: a matematikai ingásat is lehet így csinálni)

30.1

Ekvipartíció tétele:

A gáz molekulák átlagos energiája egyenletesen oszlik el a szabadsági fokokon, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}kT$ az egy szabadsági fokra jutó energia.

1 és 2 atomos gáz állandó térfogaton vett ~~mólhő~~ $Q = C_n \Delta T$

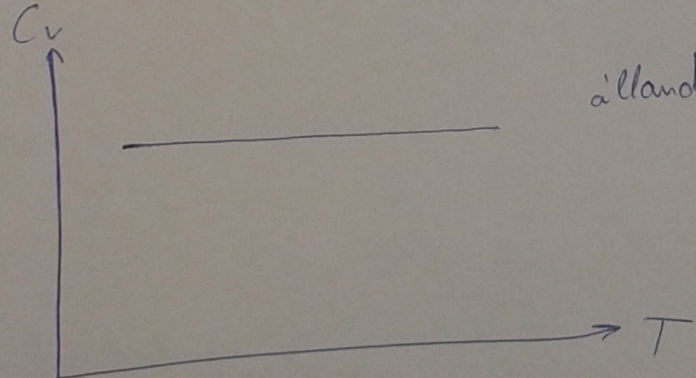
~~1 atomosra~~

25, ösben levezetve, hogy a mólhő állandó térfogaton: $C_v = \frac{f}{2} R$

így 1 atomosra: $C_v = \frac{3}{2} R$

2 atomosra $C_v = \frac{5}{2} R$

H_2 molekula állandó térfogaton vett mólhőjének hőmérséklet függése



állandó, nem függ a hőmérséklettől