

1. példa. Levegőben áll egy $R_1 = 5$ cm sugarú, $Q_1 = 5$ nC töltésű, illetve egy $R_2 = 10$ cm sugarú, $Q_2 = -5$ nC töltésű fémgömb. A gömbök középpontja egymástól $d = 75$ cm távolságban van.

a) Határozza meg a gömbök közötti feszültséget. (3 pont)

A szuperpozíció ill. a helyettesítő ponttöltések potenciálformulája alapján, a kis sugarú köze-lítés alkalmazásával: (1 p)

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[Q_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d} \right) + Q_2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = 1,23 \text{ kV} \quad (2 \text{ p})$$

b) Az elrendezés mely pontjában a legnagyobb a felületi töltéssűrűség nagysága, és mekkora ez az érték? (3 pont)

Az R_1 sugarú gömb felszínén, a másik gömbhöz legközelebbi pontban: (1 p)

$$\sigma_{\max} = D_{\max} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{Q_1}{R_1^2} - \frac{Q_2}{d^2} \right] = 160 \text{ nC/m}^2 \quad (2 \text{ p})$$

c) Határozza meg a gömbök közötti kapacitást. (2 pont)

Az a) pont eredménye alapján:

$$C_{12} = \frac{Q_1}{U_{12}} = 4,07 \text{ pF} \quad (2 \text{ p})$$

d) Mekkora erő hat arra a $Q_0 = 10$ pC nagyságú ponttöltésre, amelyet a gömbök közép-pontjait összekötő szakasz felezőpontjában helyezünk el? (2 pont)

A térerősség nagysága itt:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{(d/2)^2} - \frac{Q_2}{(d/2)^2} \right] = 639 \text{ V/m}, \quad (1 \text{ p})$$

ezzel az erő: $F = Q_0 E = 6,39 \text{ nN} \quad (1 \text{ p})$

IMSc kérdések:

e) Egy $Q' = 6$ nC ponttöltést az 1. gömb középpontjától $R_1 + h$ távolságban helyezzük el, ahol $h = 0,02R_1$. Becsülje meg ekkor a ponttöltésre ható erőt. [3 pont]

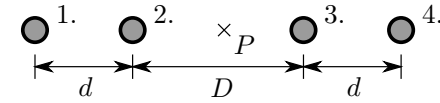
Csak a „tükörtöltés” számít, mert $h \ll R_1 \ll d$, és a Q_1 , Q_2 és Q' töltések nagyságrendje azonos: (1 p)

$$F \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'^2}{(2h)^2} = 81 \text{ mN} \quad (2 \text{ p})$$

f) Mekkora munka árán lehet a 2. gömbről az 1. gömbre további $\Delta Q = 2$ nC töltést átvinni? (Ekkor az e) pont szerinti Q' nincs jelen.) [2 pont]

$$\Delta W = \frac{1}{2C_{12}} [(Q_1 + \Delta Q)^2 - Q_1^2] = 2,95 \text{ } \mu\text{J} \quad (2 \text{ p})$$

2. példa. A papír síkjára merőlegesen futnak az ábrán vázolt párhuzamos, igen hosszú vezetők. A közeg levegő, a vezetők anyaga nem ferromágneses. A távolságok $d = 8$ cm ill. $D = 20$ cm, és minden vezető sugara $a = 4$ mm. Az 1-2. és 3-4. vezetők kettősveze-tékeket alkotnak: az 1. vezetőkben I_1 áram folyik befelé (a papír síkja mögé), a 2.-ban ugyanennyi kifelé, a 3. vezetőkben I_2 áram folyik befelé és a 4.-ben ugyanennyi kifelé.



a) Mekkora a mágneses térerősség nagysága a P pontban (amely a vezetők síkjában, a 2. és 3. vezetők közötti távolságban van), ha $I_1 = 3$ A és $I_2 = 0$? (2 pont)

A P pontban az egyes vezetők függőleges mágneses térerősség vektorokat keltenek. (1 p)

$$H(P) = \frac{I_1}{2\pi} \left(\frac{1}{D/2} - \frac{1}{d + D/2} \right) = 2,12 \text{ A/m} \quad (1 \text{ p})$$

b) Határozza meg az I_1 áramú kettősvezeték hosszegységre eső külső öninduktivitását. (4 pont)

Ld. Példatár 4.9 példa. **B** helyfüggvénye: (2 p)

A fluxus kifejezése integrálással: (1 p)

A végeredmény: $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} = 1,18 \text{ } \mu\text{H/m} \quad (1 \text{ p})$

(Használható az $L' \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} = 1,20 \text{ } \mu\text{H/m}$ közelítés is.)

c) Határozza meg az I_1 és I_2 áramú kettősvezetékek közötti hosszegységre eső kölcsönös induktivitást. (4 pont)

Legyen $I_2 = 0$. Φ'_2 referenciairánya lefelé mutat. Ki kell fejezni Φ'_2 -t I_1 -gyel. (1 p)

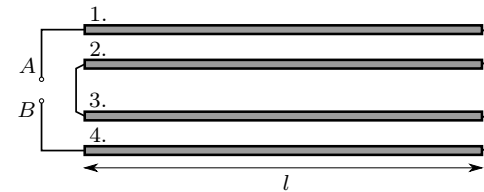
(Megj.: az integrálási határokból nyugodtan elhagyható $\pm a$ a d -t és D -t tartalmazó kifejezésekben, mert $a \ll d, D$.)

$$\Phi'_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\ln \frac{2d+D}{d+D} - \ln \frac{d+D}{D} \right) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{D(2d+D)}{(d+D)^2} \quad (2 \text{ p})$$

$$L'_{21} = M' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D(2d+D)}{(d+D)^2} = -17,0 \text{ nH/m} \quad (1 \text{ p})$$

IMSc kérdés:

d) Mekkora az AB kapcsok között mérhető induktivitás, ha a fenti vezetők közül egy $l = 12$ m hosszú elrendezést állítunk össze az ábrán vázolt kapcsolással? [3 pont]



$$u_{AB} = u_{12} + u_{34} = l \left(L' \frac{di_1}{dt} + M' \frac{di_1}{dt} + M' \frac{di_1}{dt} + L' \frac{di_1}{dt} \right) \quad (2 \text{ p})$$

$$L_{AB} = 2l(L' + M') = 27,9 \text{ } \mu\text{H} \quad (1 \text{ p})$$

(Megj.: az indukált feszültség helyett természetesen lehet a fluxusokkal is számolni.)

Kis példák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon mellékelje.)

1. A mágneses indukció a térben homogén eloszlású, időfüggvénye pedig a $[-1, 1]$ s intervallumban $\mathbf{B}(t) = \hat{\mathbf{e}}_z(0,5 + 0,5t)\text{T}$ (az idő egysége s). Határozza meg az $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l}$ integrál abszolútértékét a $t = 0$ pillanatban, ha az L görbe egy az xy síkban fekvő 1 cm sugarú kör.

$$|\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l}| = 157 \mu\text{V}$$

2. Egy R sugarú gömbön belül a töltéssűrűség kezdetben konstans ρ_0 értékű. A töltéssűrűség Δt idő alatt egyenletesen zérusra csökken. Határozza meg eközben a gömb felszínén a normális irányú térfogati áramsűrűség nagyságát, feltéve hogy ez a felszín minden pontjában azonos.

$$J = \frac{\rho_0 R}{3\Delta t}$$

3. Egy két elektródából és a földből álló rendszerben a részkapacitások $C_{10} = C_{20} = 150 \text{ pF}$, $C_{12} = 20 \text{ pF}$. Az elektródák töltés rendje $Q_1 = 2 \text{ nC}$ és $Q_2 = 4 \text{ nC}$. Számítsa ki az 1. elektróda potenciálját, ha a föld potenciálja 0.

$$\Phi_1 = 14,7 \text{ V}$$

4. Egy 8 cm sugarú gömb alakú földelő elektróda középpontja 60 cm mélyen van a földfelszín alatt. A föld fajlagos vezetőképessége $0,3 \text{ S/m}$. Adja meg az elektróda és a végtelen távoli pont közötti feszültséget, ha az elektródába 5 A egyenáramot vezetünk.

$$U = 17,7 \text{ V}$$

5. Egy pontban az elektromos térerősség $\mathbf{E} = (4\hat{\mathbf{e}}_x + 3\hat{\mathbf{e}}_z)\text{V/m}$, a polarizáció vektora pedig $\mathbf{P} = 20\hat{\mathbf{e}}_z \text{ pC/m}^2$. Adja meg ebben a pontban az elektromos eltolás vektorának nagyságát.

$$|\mathbf{D}| = 58,5 \text{ pC/m}^2$$

6. **IMSc** **kis példa** [2 pont]: Egy l hosszúságú, vékony, egyenes rúdon a vonalmenti töltéssűrűség $q(z) = q_0 z/l$, ahol a z koordináta tengely a rúdra illeszkedik és $z = 0$ a rúd közepe. Ha a rudat homogén elektromos mezőbe helyezzük, akkor az arra ható forgatónyomaték megegyezik egy \mathbf{p} momentumú elektrosztatikus dipólusra ható forgatónyomatékkal. Adja meg a \mathbf{p} vektort.

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{q_0 l^2}{12}$$

Elemi töltés- és árameloszlások keltette mezők vákuumban:

- Ponttöltés: $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$, $E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$

- Végtelen egyenes vonaltöltés: $\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$, $E_r(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$

- Végtelen egyenes vonaláram: $B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$

Konstansok: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$