ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak **II. ZÁRTHELYI** α **változat** **2011. nov. 17.**
Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (10 pont)

Mit értünk azon, hogy $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$? $\quad (x_0, A \in \mathbb{R})$

A definíció segítségével igazolja, hogy

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{4x+1} = 3 \quad ! \qquad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

D $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$:

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0 \quad (\varepsilon, \delta \in \mathbb{R})$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ $\quad$ 2

$f(x) = \sqrt{4x+1}$, $A = 3$, $x_0 = 2$:

$|f(x) - A| = |\sqrt{4x+1} - 3| = \left|\left(\sqrt{4x+1} - 3\right)\frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3}\right|$ 2 $=$

$= \left|\frac{4x+1-9}{\sqrt{4x+1}+3}\right|$ 2 $= \frac{4|x-2|}{\sqrt{4x+1}+3} \le \frac{4|x-2|}{0+3} < \varepsilon$

$\Rightarrow |x-2| < \frac{3\varepsilon}{4}$ 3 $\Rightarrow \delta(\varepsilon) = \frac{3}{4}\varepsilon$ 1

2. feladat (15 pont)

$$f(x) = \frac{(x^2-1)\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{x^2 - x}$$

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ $\qquad$ b) $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$ $\qquad$ c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$

$f(x) = (x+1)\,\frac{x-1}{x-1}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}x}{x}$

a) $\boxed{6}$ $\lim_{x\to 0} \underbrace{(x+1)}_{1} \cancel{\frac{x-1}{x-1}}\ \frac{\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}x}{x} = \frac{\pi}{4}$, mert

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}x}{x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}x)^2}\cdot\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$

an1z2α111117/1.

b.) $\lim\limits_{x\to 1} \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{=1} \underbrace{(x+1)}_{\downarrow 2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}x}{x} = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}$

$\boxed{4}$ $\to \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}$

c.) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x^2-1}{x^2-x}}\ \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{5}$ $\frac{\pi}{4}x \to \infty$, $\to \frac{\pi}{2}$

$= \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \to 1$

3. feladat (17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} b \cdot \operatorname{arctg}\left(1-\dfrac{x}{2}\right), & \text{ha } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{\sin\left(\pi\sqrt[3]{x^2}\right)}{2\sqrt[3]{x^2}}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Adja meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen $x = 0$-ban!

b) $b = 1$ értékénél írja fel $f'(x)$ értékét, ahol létezik!

a.) $\boxed{6}$

$f(0-0) = f(0) = b \cdot \operatorname{arctg} 1 = b \cdot \frac{\pi}{4}$ (2)

$f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin(\pi\sqrt[3]{x^2})}{2\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin(\pi\sqrt[3]{x^2})}{\pi\sqrt[3]{x^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ (3)

$\to 1$

A folytonosság feltétele:

$b\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{b=2}}$ (1)

b.) $f'(0) \nexists$, mert $b=1$ esetén f nem folytonos $x=0$-ban. (2)

$x<0$: $f'(x) = \frac{1}{1+\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (4)

$x>0$: $f'(x) = \frac{\cos(\pi\sqrt[3]{x^2})\cdot\pi\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot 2\cdot\sqrt[3]{x^2} - \sin(\pi\sqrt[3]{x^2})\cdot 2\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\left(2\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)^2}$

(5)

an1z2x 111117/2.

4. feladat (12 pont)

$$f(x) = \sqrt[5]{x^4\,\sin(3x^2)}\,, \qquad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a) Határozza meg a deriválási szabályok alapján $f'(x)$ értékét $x \neq 0$ esetén!

b) Határozza meg a *derivált definíciója* alapján $f'(0)$ értékét!

a.) $\boxed{5}$ $f'(x) = \frac{1}{5}\left(x^4 \cdot \sin(3x^2)\right)^{-4/5} \cdot \underbrace{\left(x^4 \cdot \sin(3x^2)\right)'}_{\left(4x^3 \cdot \sin(3x^2) + x^4 \cos(3x^2) \cdot 6x\right)}$

b.) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt[5]{h^4 \sin(3h^2)} - 0}{h} =$ ② ①

$= \lim\limits_{h \to 0} \sqrt[5]{\frac{h^4 \sin(3h^2)}{h^5}} = \lim\limits_{h \to 0} \sqrt[5]{\underset{\downarrow\, 0}{h}\ \underset{=1}{\frac{h^3}{h^3}}\ \underset{\downarrow\, 1}{\frac{\sin(3h^2)}{3h^2}} \cdot 3} = 0$ ④

5. feladat (18 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-1)^2}\,, \qquad x < 1$$

a) $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = ?\,, \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

b) Írja fel $f'(x)$-et!

c) Indokolja meg, hogy létezik a függvény inverze!
$f^{-1}(x) = ?\,, \qquad D_{f^{-1}} = ?\,, \qquad R_{f^{-1}} = ?$

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x \to 1-0} \operatorname{arctg} \underset{+\infty}{\left(\frac{1}{\underset{\to +0}{(x-1)^2}}\right)} = \frac{\pi}{2}$ ③

$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)_{\to 0} = \operatorname{arctg} 0 = 0$ ②

b.) $\boxed{4}$ $f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-1)^4}} \; \frac{-2}{(x-1)^3}$

anl z2x 111117/3.

c.) $I = (-\infty, 1)$ intervallumon $f'(x) = \underbrace{\dfrac{1}{1+\frac{1}{(x-1)^4}}}_{>0} \cdot \dfrac{-2}{\underbrace{(x-1)^3}_{<0}} > 0$

$\boxed{9}$

$\Rightarrow$ f szigorúan monoton nő I-n $\Rightarrow \exists f^{-1}$ $I = D_f$-en (2)

$y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2} = \operatorname{tg} y$

$\Rightarrow (x-1)^2 = \dfrac{1}{\operatorname{tg} y} \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tg} y}} < 0$

$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tg} y}}$

$x \longleftrightarrow y$: $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}$ (4)

$R_f = (0, \frac{\pi}{2})$: a.) és f szig. mon. nő (1)

$D_{f^{-1}} = R_f = (0, \frac{\pi}{2})$, $R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 1)$ (2)

6. feladat (14 pont)

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(4x+1)}{\operatorname{ch}(4x-2)} = ?$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(4x)}{\operatorname{arctg}(8x^2)} = ?$

a.) $\boxed{7}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x+1} - e^{-(4x+1)}}{e^{4x-2} + e^{-(4x-2)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^{4x}}}{\cancel{e^{4x}}} \frac{e^1 - e^{-8x-1}}{e^{-2} + e^{-8x+2}} =$

$= \dfrac{e^1 - 0}{e^{-2} - 0} = e^3$

b.) $\boxed{7}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{\operatorname{arctg} 8x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin 4x \cos 4x \cdot 4}{\frac{1}{1+(8x^2)^2} \cdot 16x} =$

$\frac{0}{0}$

$= \dfrac{1}{4} \underbrace{\dfrac{\sin 4x}{4x}}_{1} \to \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4}{1} = 2$

an1z2x 111117/4.

7. feladat (14 pont)

$$f(x) = x^2 + \frac{8}{x}$$

a) Hol konvex, hol konkáv a függvény? Hol van inflexiós pontja?

b) Írja fel az $x_0 = -2$ ponthoz tartozó érintőegyenes egyenletét!

a.) $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^2}$ (2)

$\boxed{10}$ $f''(x) = 2 + \frac{16}{x^3}$ (2) $= 2\,\frac{x^3+8}{x^3}$ $f''(x)=0: \ x^3+8=0 \Downarrow x=-2$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
f''	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\smile$	infl. pont	$\frown$	szak. hely	$\smile$

(6)

b.) $y_é = f(-2) + f'(-2)(x+2) = 0 + (-6)(x+2)$ (2) (2)

$\boxed{4}$

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

$$f(x) = \sin(3x) + 2, \qquad g(x) = 1 + x^2$$

a) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = ?$, *b)* $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = ?$

a.) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{\cos(3x)\cdot 3\,(1+x^2) - (\sin(3x)+2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$ $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$

b) $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{\ln (\sin(3x)+2)^{1+x^2}}\right)' =$

$\boxed{6}$

$= \left(e^{(1+x^2)\cdot \ln(\sin(3x)+2)}\right)' =$ (2)

$= e^{(1+x^2)\cdot \ln(\sin(3x)+2)} \cdot \left((1+x^2)\cdot \ln(\sin(3x)+2)\right)' =$ (2)

$= (\sin(3x)+2)^{1+x^2} \cdot \left(2x \ln(\sin(3x)+2) + (1+x^2)\frac{3\cdot\cos 3x}{\sin(3x)+2}\right)$ (2)

anal2x111117/5.

9. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{x \to 3 \pm 0} \left(\frac{1}{|x-3|} + \frac{1}{x-3} \right) = ?$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x} = ?$

a.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x \to 3+0} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} \right) = \lim\limits_{x \to 3+0} \frac{2}{\underset{\to +0}{(x-3)}} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 3-0} \Big(\underbrace{\frac{1}{-(x-3)} + \frac{1}{x-3}}_{\equiv 0} \Big) = 0$

b.) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin 6x}{6x}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\frac{5x}{\sin 5x}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\cos 5x}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\frac{6x}{5x}}_{= \frac{6}{5}} = \frac{6}{5}$

(Vagy: L'H-lal:

$\lim\limits_{x \to 0} \underset{\frac{0}{0}}{\frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\overset{\to 1}{\cos 6x} \cdot 6}{\underset{\to 1}{\frac{1}{\cos^2 5x}} \cdot 5} = \frac{6}{5}$)

an1z2a111117/6.