Recski András – Matroidelmélet

tetsz. vektortér: $V[T]$ — valós testek feletti vektortér

$V[T]$-ben kiválasztok E bizonyos vektorok halmazát

$X \subseteq E$-re ha X lin. független $\Rightarrow X \in \mathcal{F}$ – lin. független rendszerek halmaza

üres halmaz?

---

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$
üres halmaz

(2) $X \in \mathcal{F}$ és $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

(3) $X, Y \in \mathcal{F}$ és $|X| > |Y| \Rightarrow \exists\, x \in X - Y$, hogy $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

Gráfok

$G(V, E)$

$X \subseteq E$-re, ha X körmentes $\Rightarrow X \in \mathcal{F}$ – most körmentes részgráfok halmaza
erre is igaz a (1), (2), (3)

fa: eggyel több pontja van mint éle

erdő: valami komponenses

Legyen E egy tetsz. véges halmaz és bizonyos $X \subseteq E$ részhalmazai alkossanak $\mathcal{F}$ halmazt, úgy hogy teljesüljön (1), (2), (3)

$(E, \mathcal{F})$ párt nevezzük matroidnak. (Whitney, 1935)

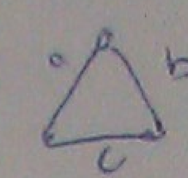
linalg. és gráfelmélet általánosítása

vektor (oszlopvektor)

mátrix: oszlopvektorok felsorolása

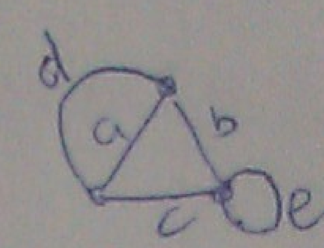
$|E| = 3$ 8 részhalmaza van 3 oszlopvektor $\binom{1}{0}\binom{0}{1}\binom{1}{1}$

① $\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



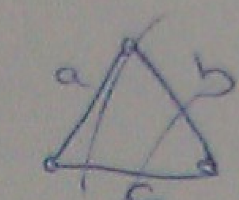
$U_{3,2}$

② $\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$|E| = 5$ 32 részhalmaz

③ $\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



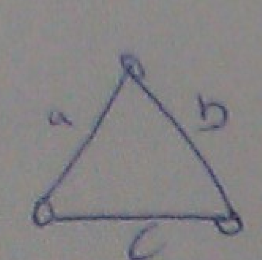
nincs megoldás $U_{4,2}$

nincs 4 élű gráf amiben 3 él kört alkot

vektormatroid

grafikus matroid

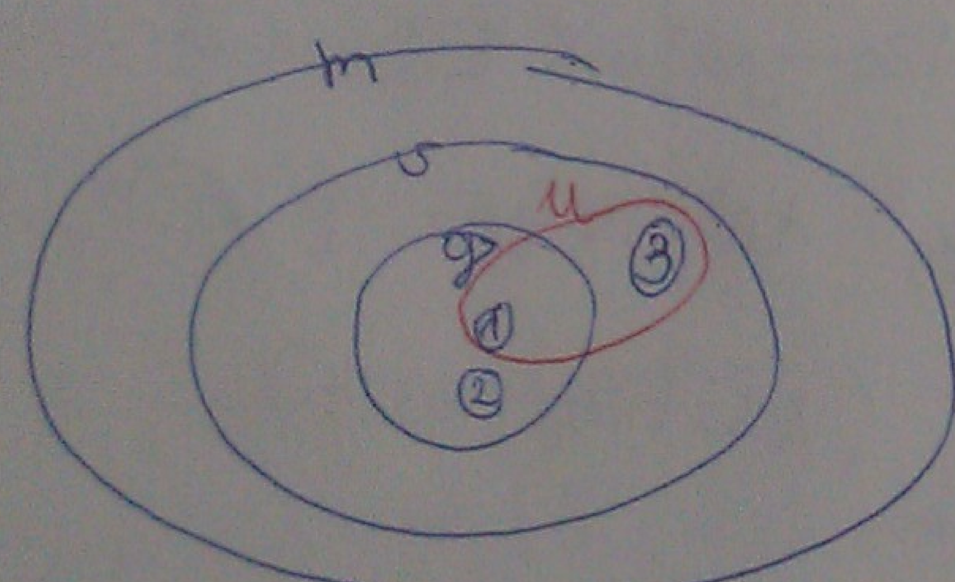
$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\} = 2^{\{a,b,c\}} - \{a,b,c\}$



két izomorf matroid

$\mathcal{F} \subseteq 2^E$ E összes részhalmazainak halmazát

Ha $|E| = n$ $|2^E| = 2^n$



~~unifo~~
<u>uniform matroidok:</u>

legyen n és k két tetsz. egész $0 \le k \le n$

E legyen egy n-elemű halmaz és $\mathcal{F}$-ben legyenek a max. k-elemű részhalmazok.

$(E, \mathcal{F}) = U_{n,k}$

Legyen E lehr. véges halmaz és $\mathcal{F} \subseteq 2^E$, úgy hogy igaz (1), (2), (3), akkor $(E, \mathcal{F})$ matroid

E: a matroid <u>alaphalmaza</u>

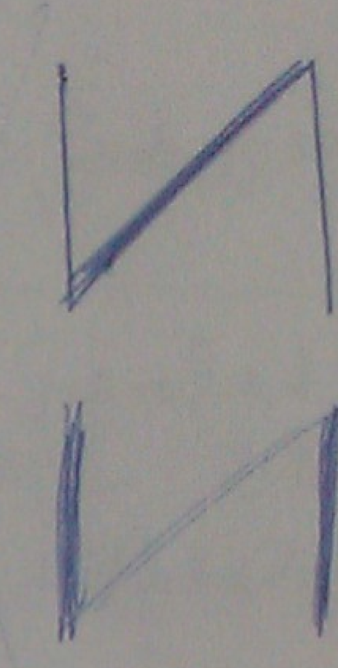
$X \subseteq E$-re, ha $X \in \mathcal{F}$: <u>X független</u>

$X \notin \mathcal{F}$: X összefüggő

Max független: <u>bázisok</u> (feszítőerdő)

min összefüggő: <u>kör</u>

$X \subseteq E$ rangja $r(X)$: Az X-beli max fgtlen részhalmazok közös mérete



Input: $(E, \mathcal{F})$ és $s: E \to \mathbb{R}^+$

Kérdés: max összsúlyú bázis? $B \subseteq E$, hogy $s(B) = \sum_{b \in B} s(b)$ max legyen

<u>Mohó alg.:</u>

0. lépés $B \leftarrow \emptyset$

1. -||- $C \leftarrow \{b \mid b \in E,\ b \notin B,\ B \cup \{b\} \in \mathcal{F}\}$

legyen b_0 ezek közül max súlyú, vagyis

$s(b_0) \geq s(b)\ \forall b \in C$-re

$B \leftarrow B \cup \{b_0\}$

Ha $C = \emptyset \Rightarrow$ STOP

GOTO 1. lépés

minden matroidra

<u>Tétel</u>: Mohó alg. $\forall (E, \mathcal{F})$ matroidra és $\forall s$ súlyfüggvényre működik.

<u>Biz</u>: Indirekt. Tfh. $s(B_{mohó}) < s(B_{opt})$

$B_{mohó} = \{a_1, a_2, \dots a_r\}$; $B_{opt} = \{b_1, b_2 \dots b_r\}$

(ebben a sorrendben) (úgy sorszámozom)

$$\begin{array}{ccccccccc} s(a_1) & \geq & s(a_2) & \geq \dots \geq & s(a_{k-1}) & \geq & s(a_k) & \geq & \dots \\ \vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| & & \wedge & & \\ s(b_1) & \geq & s(b_2) & \geq \dots \geq & s(b_{k-1}) & \geq & s(b_k) & \geq & \dots \end{array} \qquad k \geq 2$$

$\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\} = Y$

$\{b_1, b_2, \dots, b_k\} = X$

$X, Y \in \mathcal{F}$; $|X| > |Y|$

$\exists\, b_t \in X - Y$ hogy $Y \cup \{b_t\} \in \mathcal{F}$

$s(a_k) < s(b_k) \le s(b_t)$

↯

a_k-t választottam, de az nem jó, ellentmondás

Input: $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ halmazrendszer és egy $s: E \to \mathbb{R}^+$ súlyfgv; $\emptyset \in \mathcal{F}$ és ha $X \in \mathcal{F}$; $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

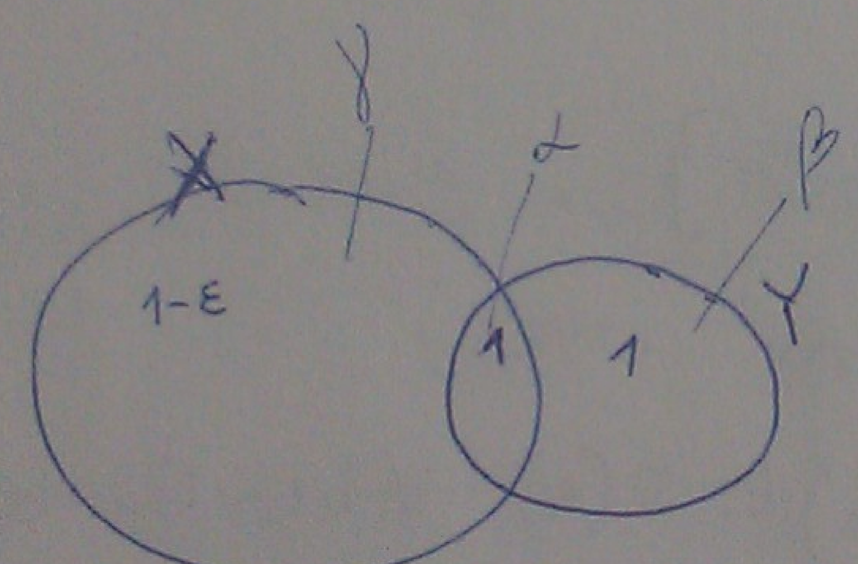
Kérdés: maximalizáljuk $s(X)$-t $X \in \mathcal{F}$-en

$$\max_{X \in \mathcal{F}} s(X) = ?$$

Tétel:

Ha ez $\forall s$-re a mohó algoritmussal mo.ható $\Rightarrow (E, \mathcal{F})$ egy matroid

Biz: indirekt HA. $\exists X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| > |Y|$ és $\forall x \in X - Y$-ra $Y \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$



$\gamma > \beta$

$$\boxed{(\alpha + \beta) \cdot 1 < \alpha \cdot 1 + \gamma(1 - \varepsilon)}$$

$\beta < \gamma(1 - \varepsilon)$

$\gamma\varepsilon < \gamma - \beta$

$0 < \varepsilon < \frac{\gamma - \beta}{\gamma}$

Matroid

$M=(E,\mathcal{F})$; $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

tetsz. véges halmaz (vektortér)

$\mathcal{F}$ független részhalmazok

$\mathcal{F}$ bizonyos tulajdonságokat tartalmaz:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

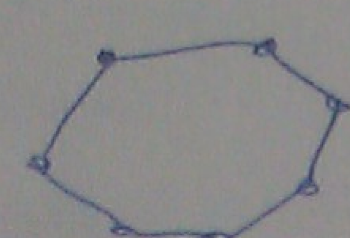
(2) $X \in \mathcal{F}$ és $Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

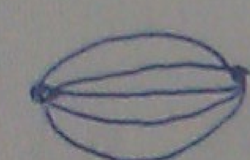
(3) $X, Y \in \mathcal{F}$ és $|X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X-Y,\ Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

---

uniformból grafikus matroid felismerése

$U_{n,n}$  n él

$U_{n,n-1}$ 

$U_{n,1}$ 

$U_{n,0}$ 

Ha $2 \leq k \leq n-2 \Rightarrow U_{n,k}$ nem grafikus

---

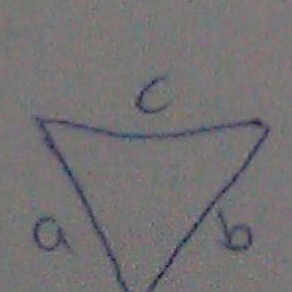
hány elemű független részhalmaz van = matroid rangja

1) $r(\emptyset)=0$

2) ha $X \supseteq Y \Rightarrow r(X) \geq r(Y)$

3) $r(X \cup \{x\}) \leq r(X)+1$

4) $\forall X, Y \subseteq E \Rightarrow r(X)+r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$ – szubmodularitás

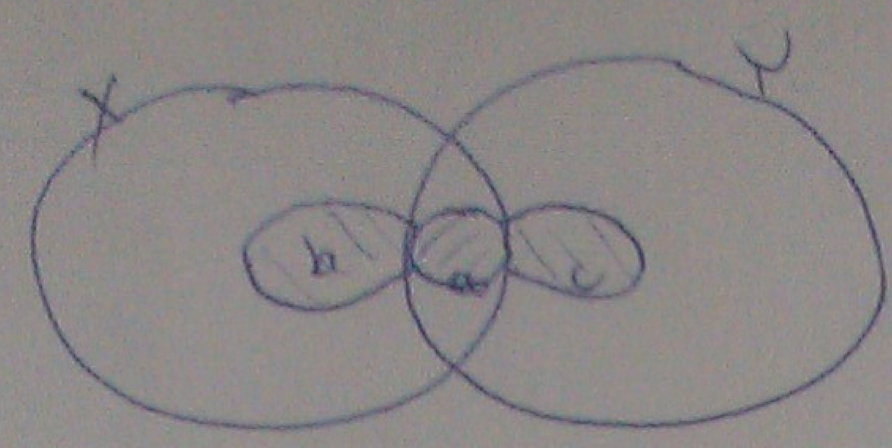


$X=\{a,b\}$ $\quad r(X)=2=r(Y)$

$Y=\{a,c\}$ $\quad r(X \cup Y)=2$

$r(X \cap Y)=1$

$2+2 > 2+1$ előfordul, de nem egyenlő



$r(X \cap Y) = a$

$r(X \cup Y) = a+b+c$

$r(X) \geq a+b$

$r(Y) \geq a+c$

~~a elem fgtlen~~
a elemű fgtlen

5) $r(X) \leq |X|$

Tétel:
Ha E tetsz. véges halmaz és $r: 2^E \to \mathbb{Z}$ úgy hogy (1), 2), 3), 4) teljesül $\Rightarrow \exists$ (egyértelműen) egy olyan $M = (E, \mathcal{F})$ matroid, melynek r a rangfgv-e,

$\boxed{X \subseteq E\text{-re } X \in \mathcal{F} \Leftrightarrow r(X) = |X|}$

$X \subseteq E$ akkor bázis, ha max. fgtlen ($X \in \mathcal{F}$ és $|X| = r(E)$)

Legyen $\mathcal{B} = \{$bázisok halmaza$\}$

(1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow |B_1| = |B_2|$

(3) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ és $\forall x \in B_1 \Rightarrow \exists y \in B_2$, hogy $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$

Tétel:
Ha E egy tetsz. véges halmaz, és $\mathcal{B} \subset 2^E$ úgy, hogy (1), (2), (3) teljesül
$\Rightarrow \exists$ (egyértelműen) egy olyan $M = (E, \mathcal{F})$ matroid, hogy
$\mathcal{B} = \{M$ bázisai$\}$

(gráf síkbarajzolása – duálisa)

$M = (E, \mathcal{F})$

B_1
B_2
$\vdots$
B_k

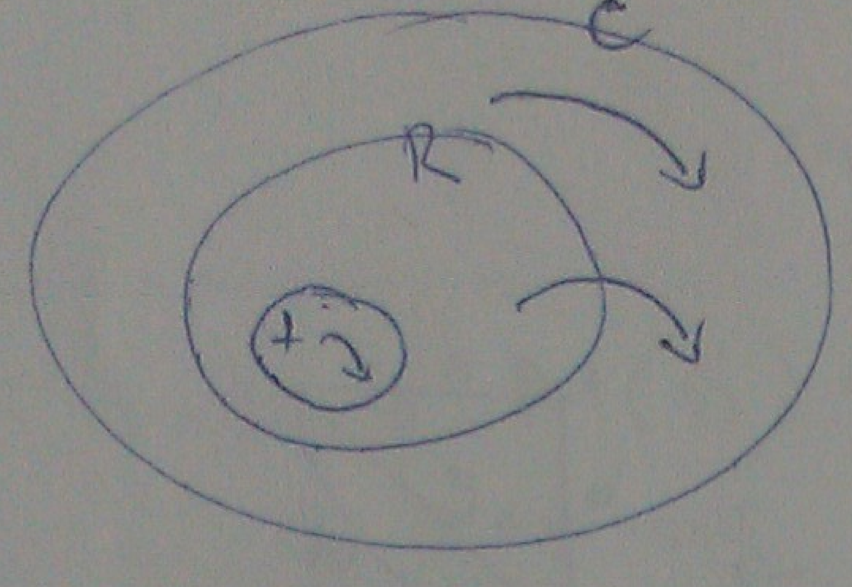
eredeti M bázisai

$M^* = (E, \mathcal{F}^*)$ (az M duálisa)

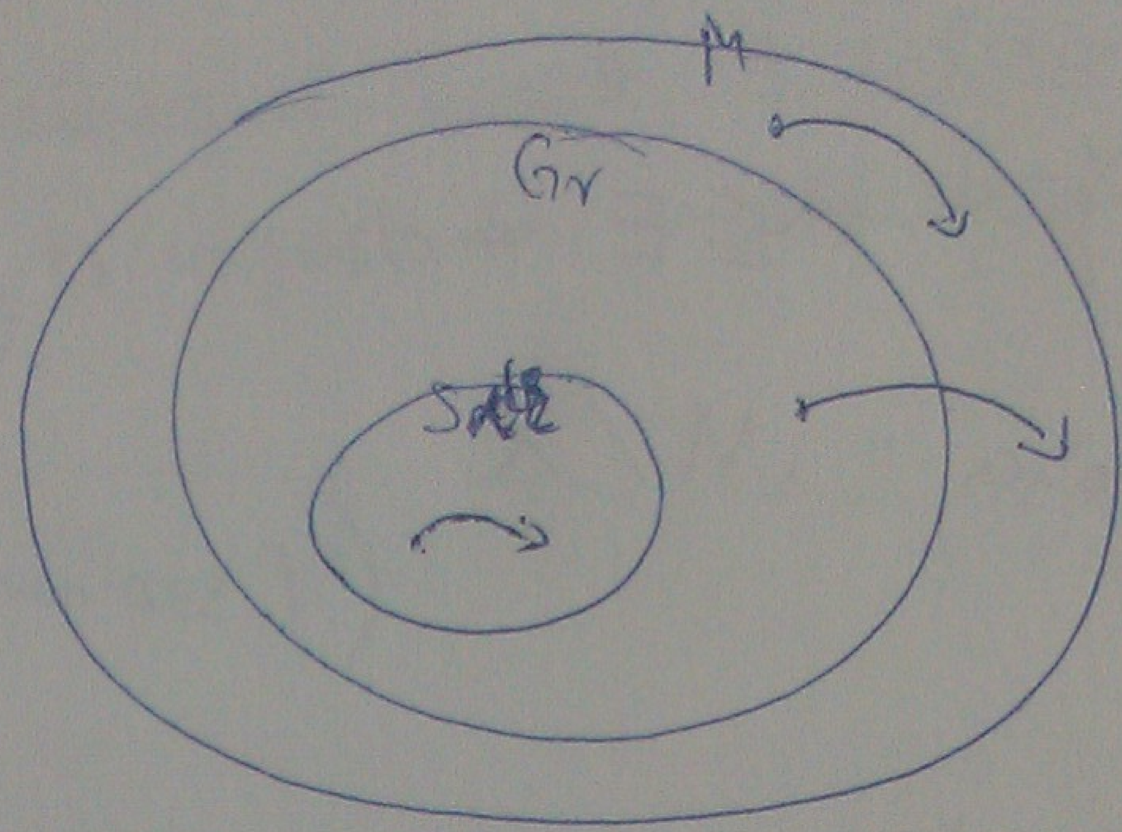
$E - B_1$
$E - B_2$
$\vdots$
$E - B_k$

bázisok komplementerei

minden matroidnak van duálisa



pozitív valós szám négyzetgyöke valós
negatív valós szám négyzetgyöke komplex



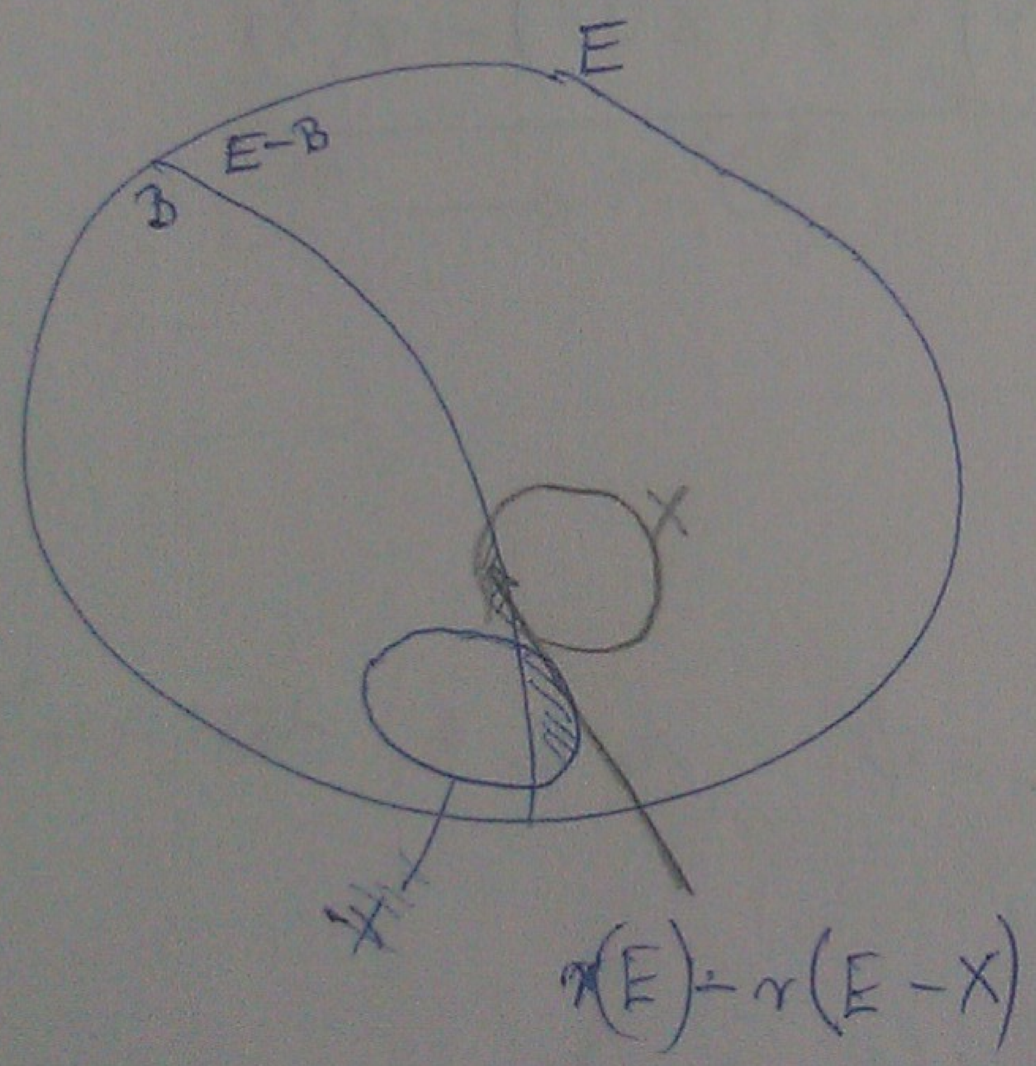
síkbarajzolható gráfok duálisa síkbarajzolható
stb.

$U_{n,k}^* = U_{n,n-k}$ mert hány elemű teljes részhalmaza van

---

$M = (E, \mathcal{F})$; $r(X)$...

$M^* = (E, \mathcal{F}^*) \to r^*(X) = ?$



$$r^*(X) = |X| - (r(E) - r(E - X))$$

$M=(E, \mathcal{F})\ ;\ X \subseteq E$

X elhagyása: $M \setminus X$ — halmazból elhagyok egy részhalmazt

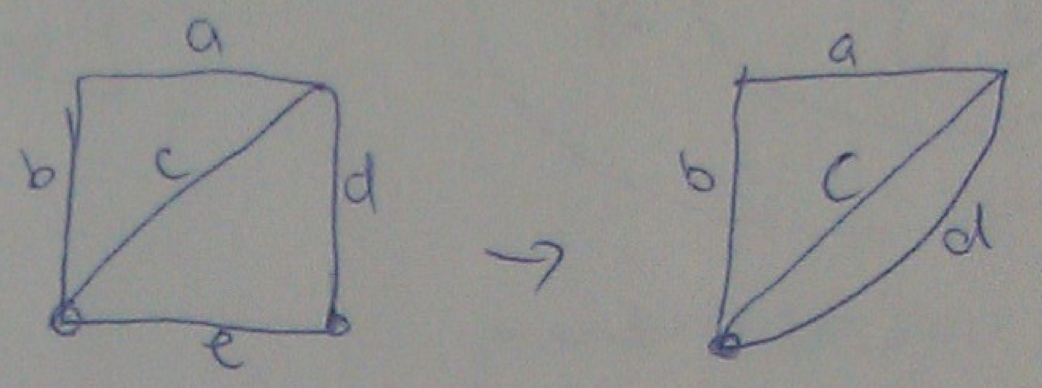
$M=(E-X,\ \mathcal{F}\setminus X)$

Egy $Y \subseteq E-X$-re $Y \in \mathcal{F}\setminus X \iff Y \in \mathcal{F}$

$M=(E, \mathcal{F})\ ;\ X \subseteq E$

X összehúzása: M / X

gráfban
él összehúzása:

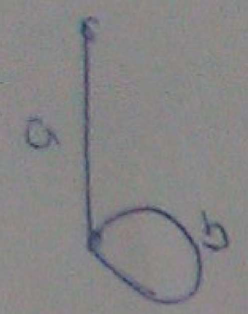


e-t húzom össze

$M=(E-X,\ \mathcal{F}/X)$

Egy $Y \subseteq E-X$-re, $Y \in \mathcal{F}/X \iff Y \cup X \in \mathcal{F}$

lehet hogy nem
független, így
nem jó



b-t összehúzni nem lehet

összehúzás: — ez jó

eredeti: $r(\ )$

összehúzás után: $R(\ )$

Egy $Y \subseteq E-X$-re, $\underline{R(Y) = r(X \cup Y) - r(X)}$

$(M \setminus A_1)\setminus A_2 = M \setminus (A_1 \cup A_2)$

$(M / B_1)/B_2 = M/(B_1 \cup B_2)$

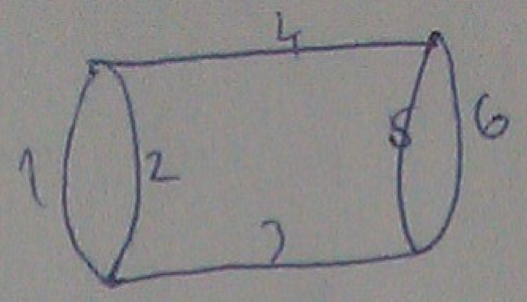
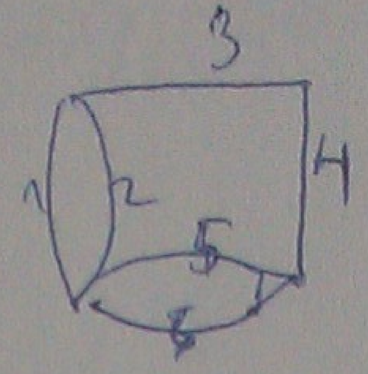
$A_1 \cap B_1 = \emptyset$ — A_1 és B_1 diszjunkt

$(M \setminus A_1)/B_1 = (M/B_1)\setminus A_1$

$(((M\setminus A_1)/B_1)\setminus A_2)/B_2 \ldots = (M \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots))/(B_1 \cup B_2 \cup \ldots)$

$(M \setminus A)^* = M^* / A$

$(M / B)^* = M^* \setminus B$

 $\overset{(2)}{\cong}$ 

gyengén izomorf: ha élhalmazaik között $\exists$ kölcsönösen egyértelmű kör- és vágásstartó megfeleltetés

---

G gráf $\to \underbrace{M(G)}_{\text{matroid}} = (E(G), \{\text{körmentesek}\})$

$\underbrace{G_1 \overset{(2)}{\cong} G_2}_{\text{gyengén izomorf}} \iff \underbrace{M(G_1) \cong M(G_2)}_{\text{izomorf}}$

(grafikus matroid)* = (kografikus matroid)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & M(G) \arrow[r] & M^*(G) \arrow[d, phantom, "\cong\ \text{izomorf}"] \\ G^* \arrow[rr] & & M(G^*) \end{tikzcd}$$

ktsz. G-re

tetsz. síkbarajzolható G-re

Matroid — grafikus
— vektor (lineáris), (koordinátázható egy F test felett)
— uniform

Vektormatroid: $V[F] \rightarrow (E, \mathcal{F})$

vektortér   F test felett

F tetszőleges

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

valós test felett ez lin. ~~összefüggő~~ független

bináris —"— összefüggő

melyik test felett, ez a kérdés előbb

vektormatroid: $\exists$ olyan test, mely felett koordinátázható

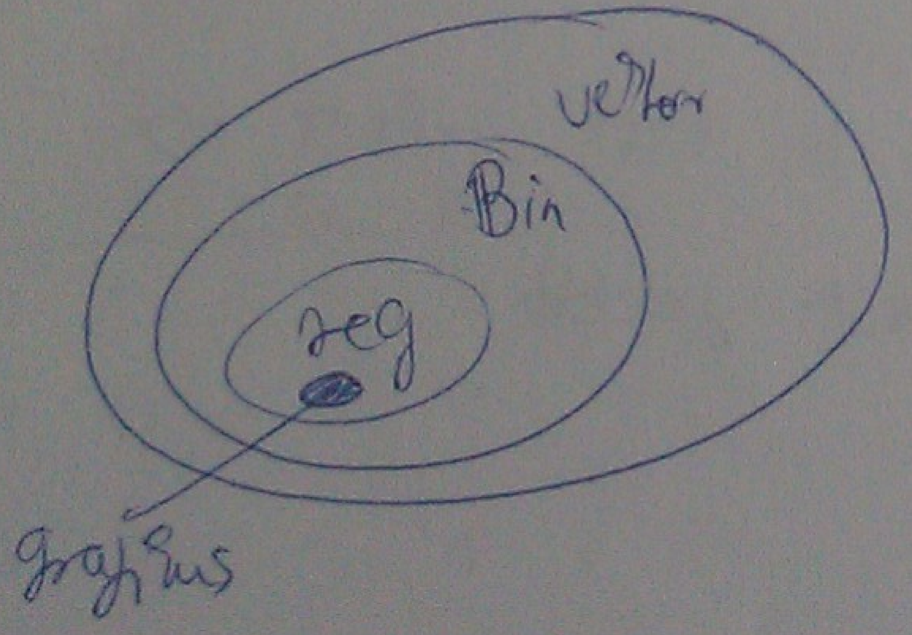
reguláris matroid: $\forall$ test felett —"—

bináris matroid: $\mathbb{B} = GF(2)$ (bináris test) felett koordinátázható

$GF(p)$: mod p maradékosztályok teste

ha p prím akkor test

ha nem akkor gyűrű



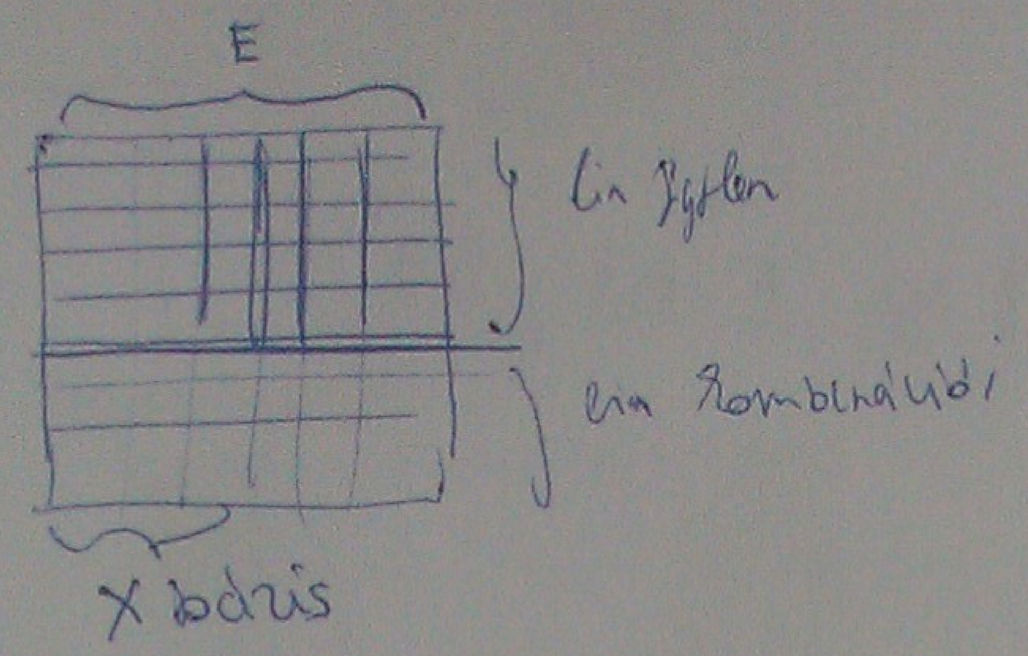
$M=(E,\mathcal{F}) \leftarrow A_{p \times q}$ Tfh A mátrix koordinátázza M-et

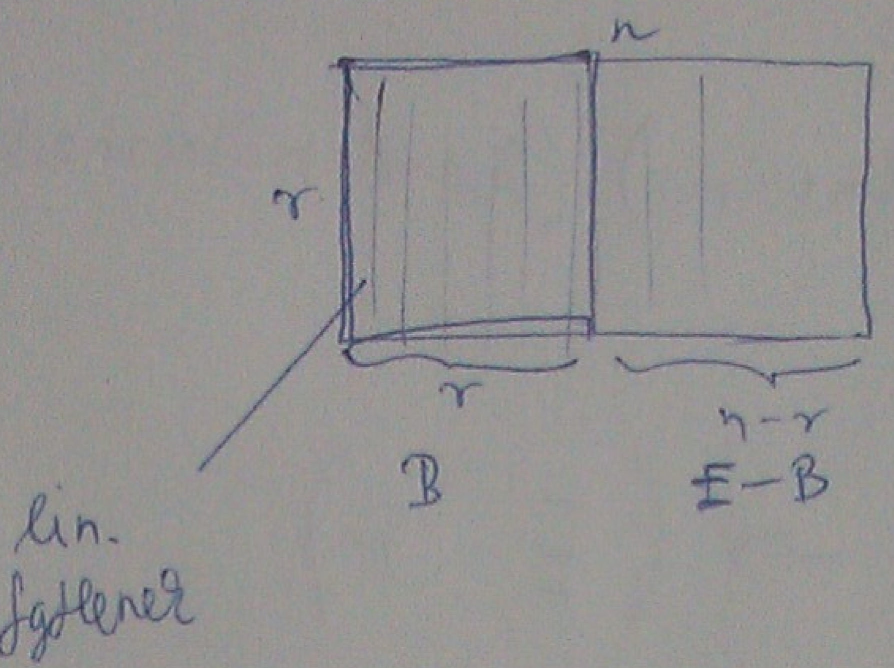
sor   oszlop

$q = |E|$

$p \geq r(E) = r$ rang

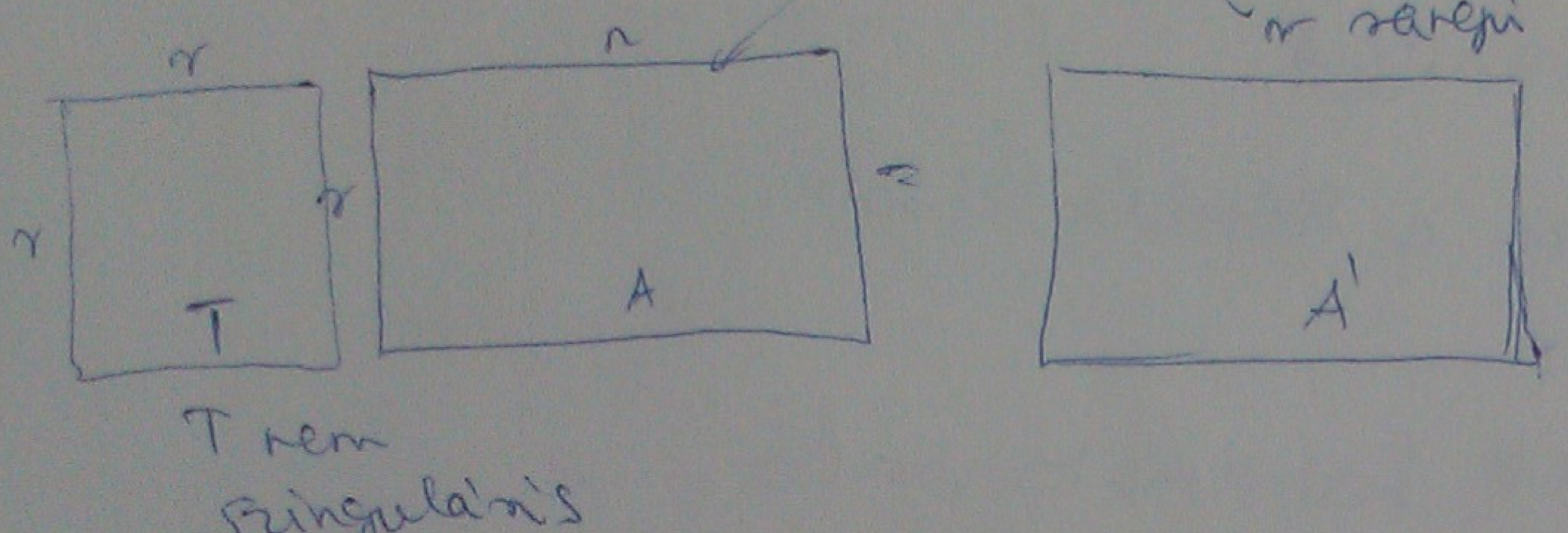
Feltételezzük, hogy $p = r$ (és akkor az összes sorvektor lin. független lesz az F test felett)





A matroidot reprezentáló $r \times n$-es mátrixban r db oszlop által alkotott $r \times r$-es részmátrix nem szinguláris $\Longleftrightarrow$ bázis

---

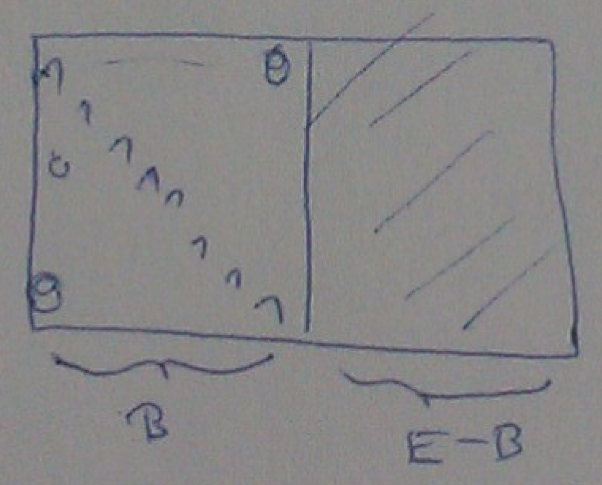


r rangú (sorai függetlenek) r a matroid rangja

A és A' ugyanazt a matroidot koordinátázzák

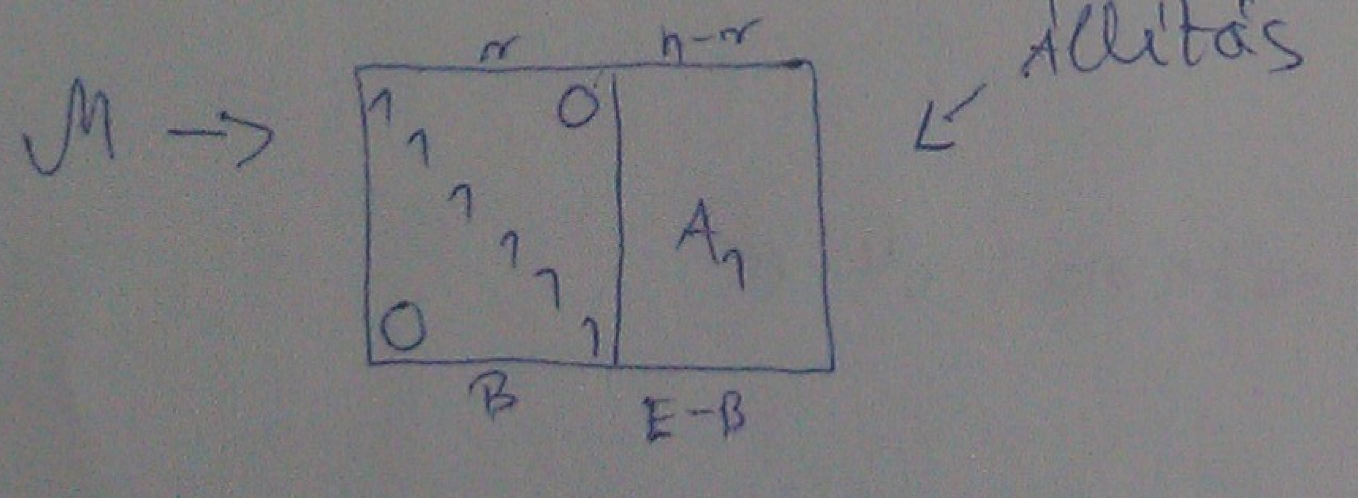
Ha $\exists T^{-1} \Rightarrow$ A, $TA = A'$ $\Rightarrow$ matroid

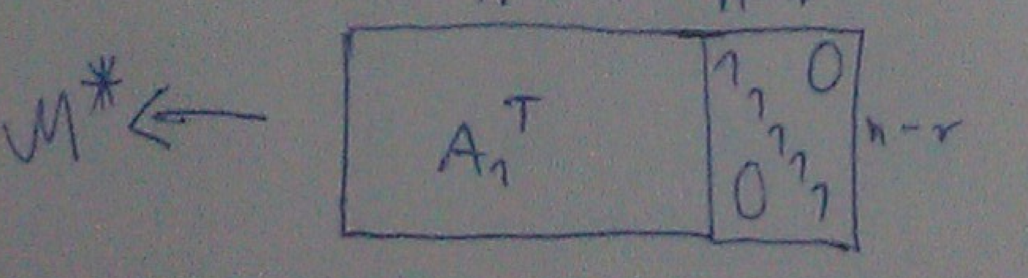
Ha $B \subseteq E$ bázis

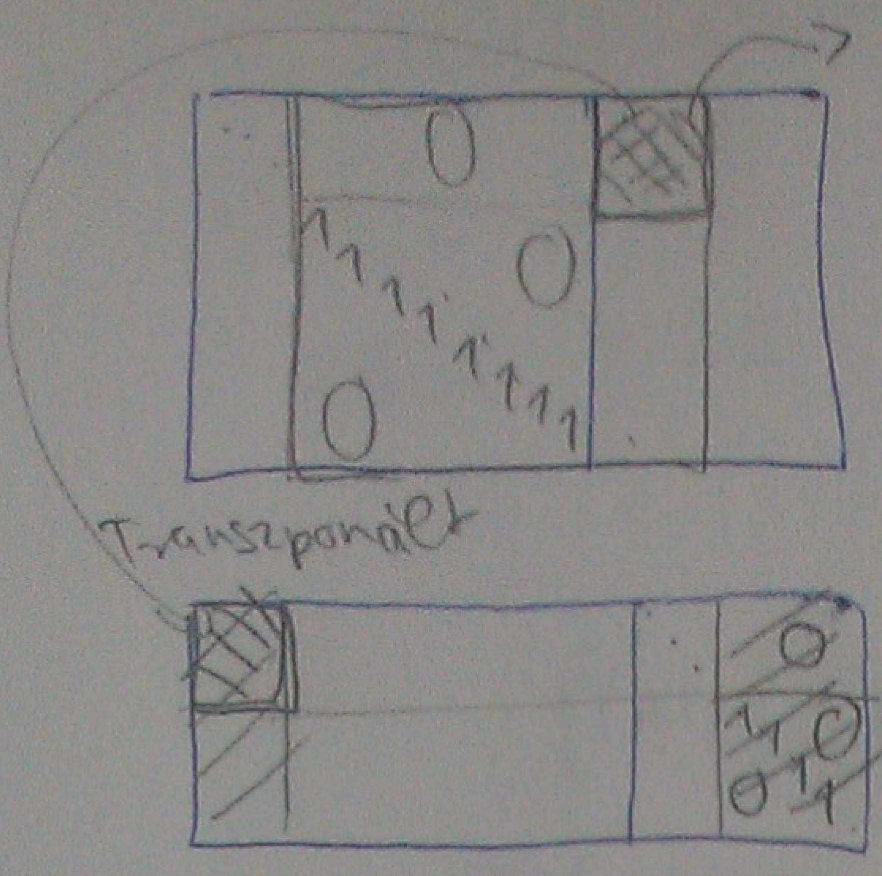


Tétel: Ha $M = (E, \mathcal{F})$ koordinátázható egy F test felett $\Rightarrow$ M^* is koordinátázható ugyanazon F test felett.

Biz.:







det. nem szub 0 legyen, ha ez nem az akkor a transzponált determinánsa se az.

$U_{4,2}$ koordinátázható egy F test felett $\iff |F| \geq 3$

$\Updownarrow$ (minden test min 2 elemű)

$F \neq \mathbb{B}$ — bináris test (összeadás, szorzás csoport)

1	0	1	1
0	1	1	x

$x \neq 0,\ x \neq 1$

Ha egy F testben $\exists$ olyan k véges egész szám, hogy F minden x elemére $\underbrace{x + x + \dots + x}_{k\text{-szor}} = 0$, akkor a legkisebb ilyet az F test karakterisztikájának nevezzük (és ez mindig prím)

$GF(p) \rightarrow p$

$\not\leftarrow$

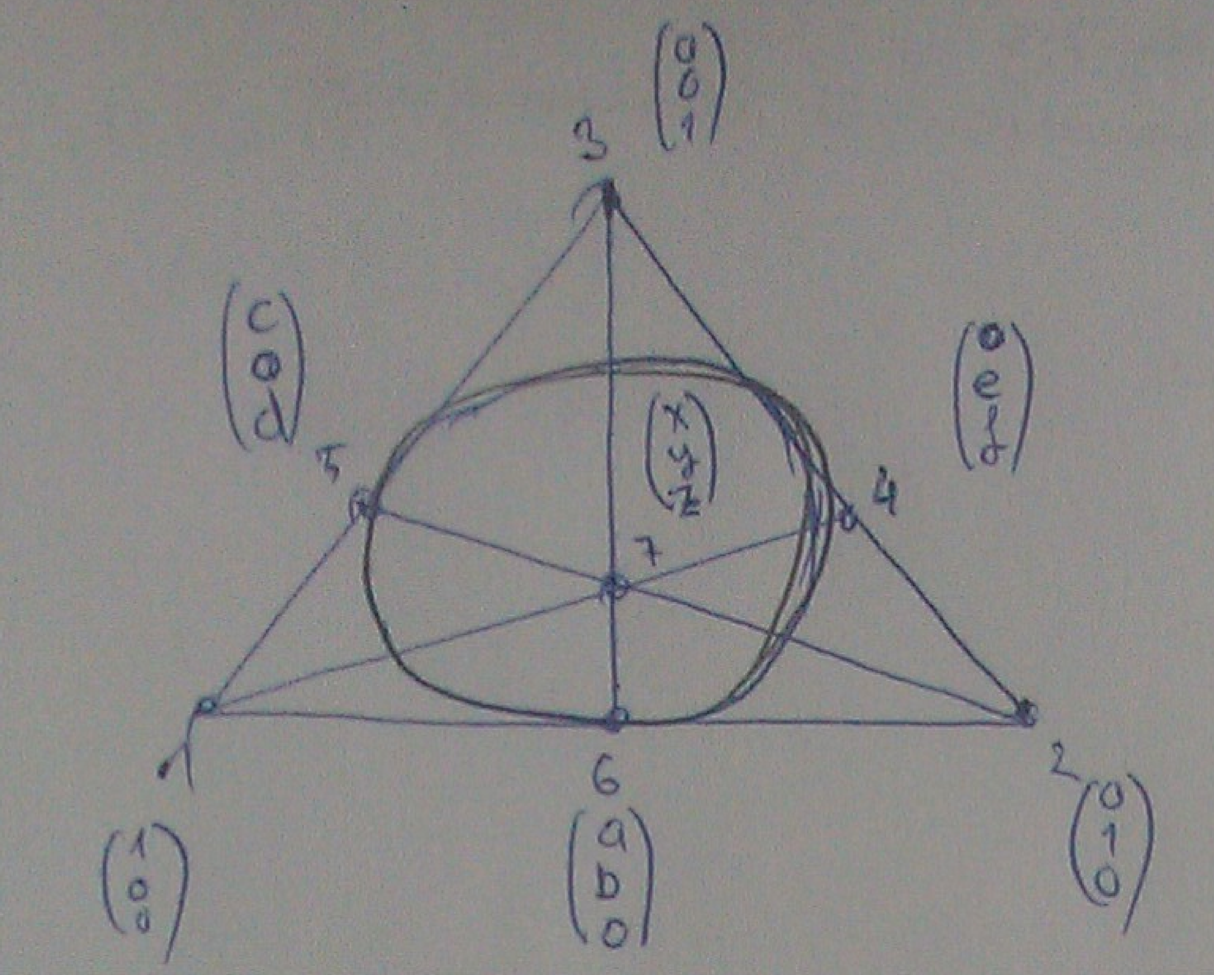
$(|F| \neq k)$

test karakterisztikája $\neq$ test elemszáma

$|F| = 4,\ k = 2$

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a



$E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{7\},$

$\{1,2\}, \dots, \{6,7\},$

$\forall$ 3 elemű, kivéve

$\underbrace{\{1,2,6\}, \{1,3,5\}, \dots, \{3,6,7\}}_{\text{egy egyenesen vannak}}, \underbrace{\{4,5,6\}}_{\text{kör}}\}$

milyen testek felett koordinátázható?

$\{1,4,7\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & e & y \\ 0 & f & z \end{vmatrix} = ez - fy = 0$$

$\{2,5,7\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & d & z \end{vmatrix} = cz - dx = 0$$

$$z = \frac{f}{e}y = \frac{d}{c}x \qquad fcy = dex$$

$\{3,6,7\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & x \\ 0 & b & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = ay - bx = 0$$

$$ay = bx \qquad y = \frac{b}{a}x$$

$$fc\frac{b}{a}x = dex \qquad /:x, \cdot a$$

$$\boxed{bcf = ade}$$

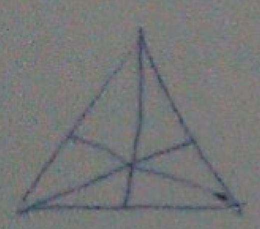
$$\begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & 0 & e \\ 0 & d & f \end{vmatrix} = -aed - bcf = 0$$

$$\boxed{bcf = -aed}$$

ellentmondanak, kivéve, ha a karakterisztika 2

F_7 koordinátázható egy F test felett $\Longleftrightarrow$ karakt.(T) = 2

F_7^- ——— " ——— $\Longleftrightarrow$ karakt.(T) $\neq 2$



F_7 : Fano-matroid

F_7^- : anti-Fano matroid

nem duális!

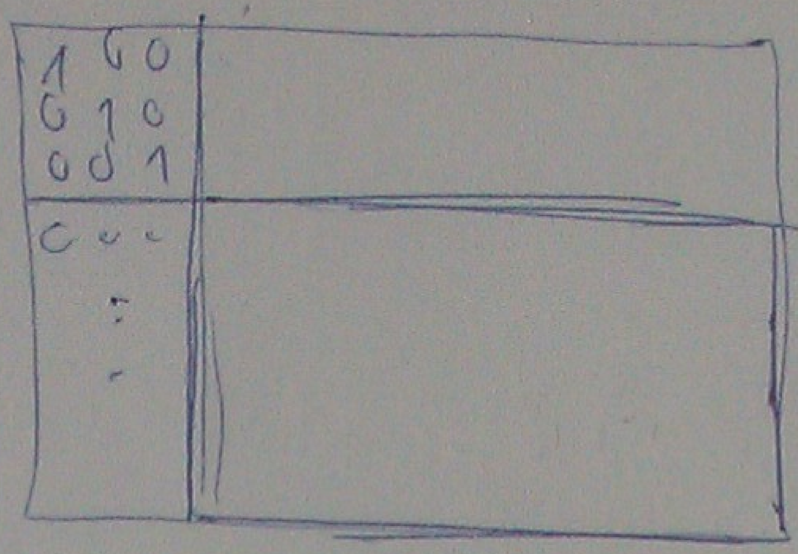
M koordinátázható F felett $\Rightarrow$ M^* is, $M \setminus X$ is, M / X

elhagyás összehúzás

minorképzés

$M = (E, \mathcal{F})$

~~X⊆E~~ $X \subseteq E$



$\underline{T}$: M bináris $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ benne minorként $U_{4,2}$ ($\Leftarrow$ nehéz nem kell tudni)

$U_{8,5}$ nem grafikus $5 \geq 2$ $8-5 \geq 2$

$U_{8,5} \setminus \{h\} = U_{7,5}$

$U_{7,5} / \{e,f,g\} = U_{4,2}$

$\underline{T}$: M reguláris $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ benne minorként $U_{4,2}, F_7, F_7^*$ ($\Leftarrow$ nagyon nehéz)

$\underline{T}$: M grafikus $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ benne minorként $U_{4,2}, F_7, F_7^*, M^*(K_5), M^*(K_{3,3})$ ($\Leftarrow$ nehéz)

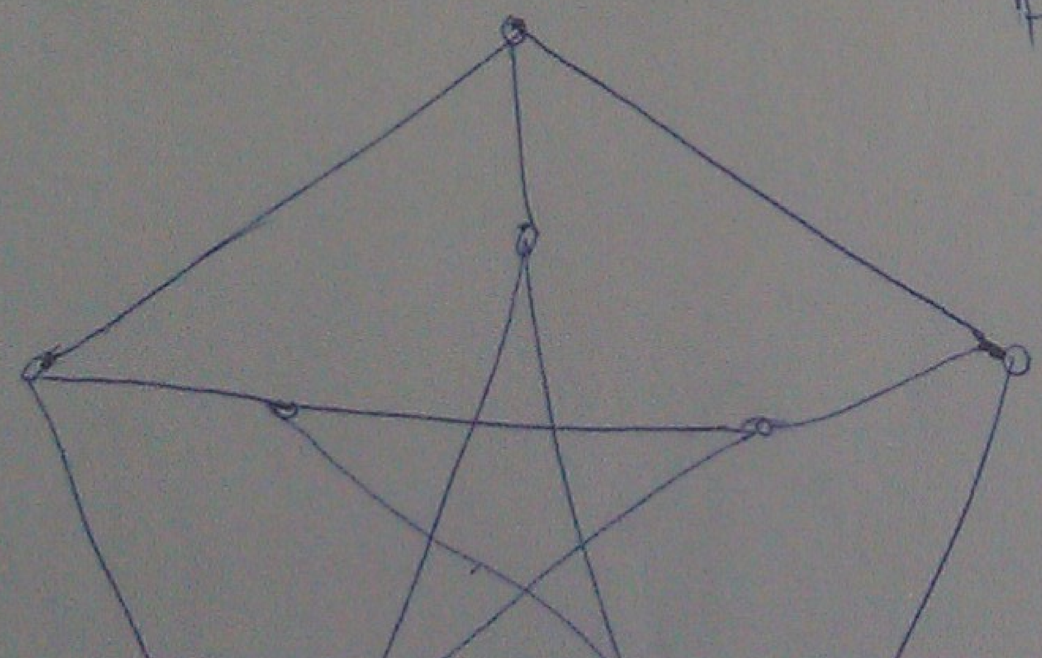
Tutte

$\underline{T}$: G síkbarajzolható $\Longleftrightarrow$ $\nexists$ benne K_5 vagy $K_{3,3}$ vagy ezek soros bővítése részgráfként $\leftarrow$ erősebb

$\Longleftrightarrow$ $\nexists$ benne K_5 v. $K_{3,3}$ minorként! Wagner

$\uparrow$ gyengébb

Peterson gráf nem síkbarajzolható



Direkt összeg

$\mathcal{M}_1=(E_1, \mathcal{F}_1)$

$\mathcal{M}_2=(E_2, \mathcal{F}_2)$

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = (E_1 \cup E_2 , \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$

Egy tetszőleges $X \subseteq E_1 \cup E_2$-re X fgtlen $\Leftrightarrow$ ~~Ka~~ $X \cap E_1 \in \mathcal{F}_1$
$X \cap E_2 \in \mathcal{F}_2$

$F_7 \oplus F_7^-$: semmilyen test felett nem koordinátázható

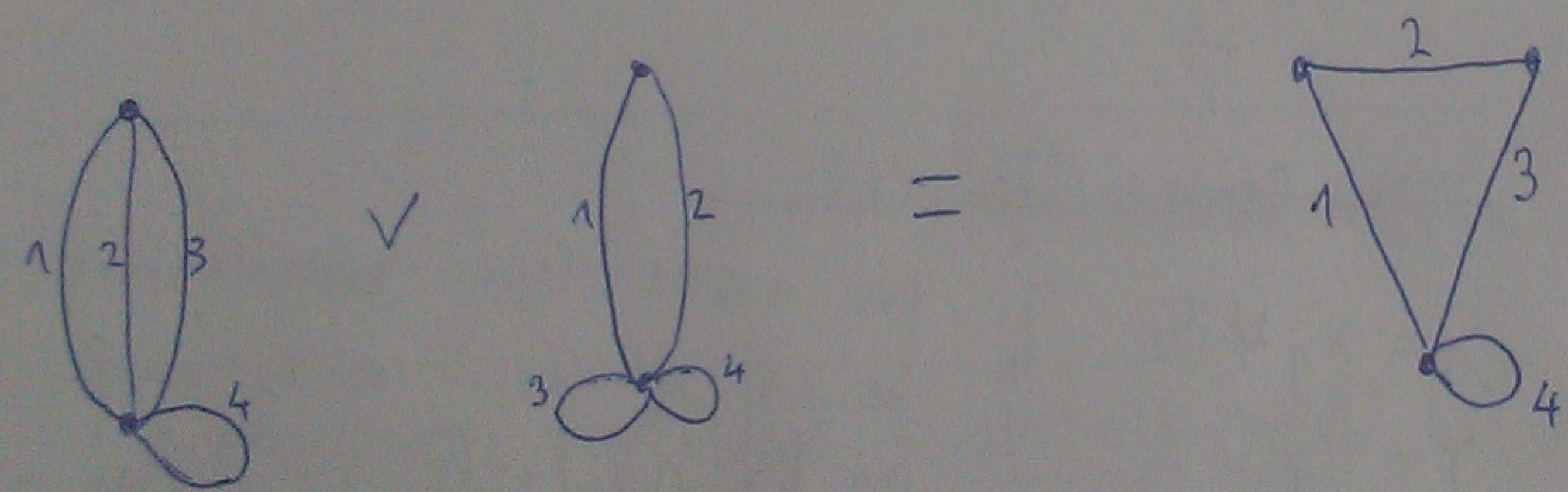
Összeg

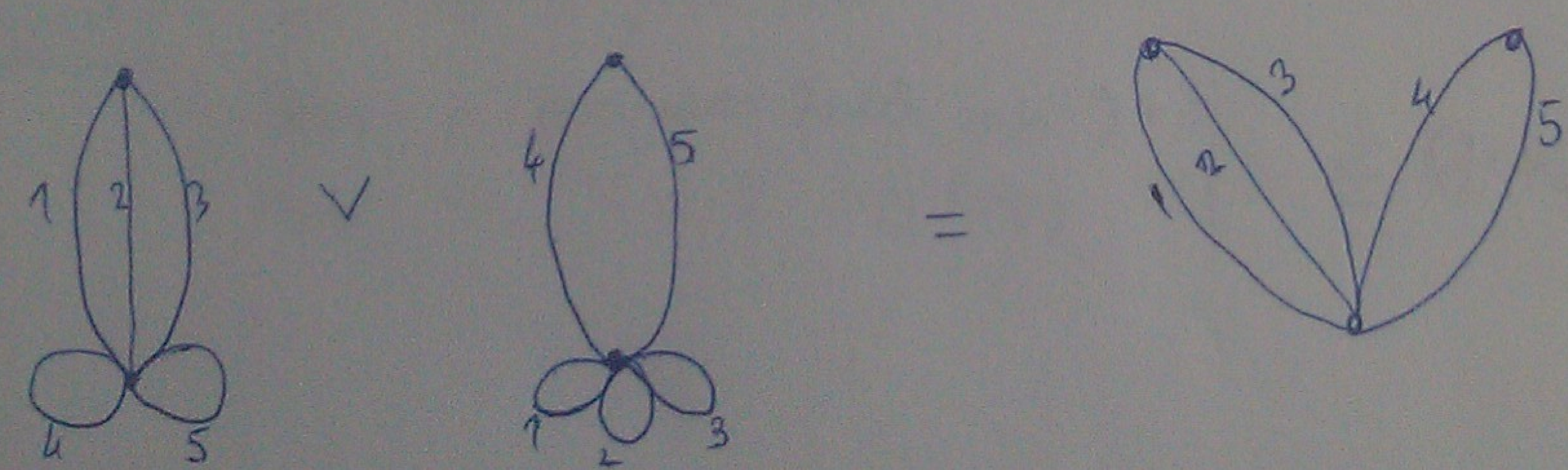
$\mathcal{M}_1=(E, \mathcal{F}_1)$

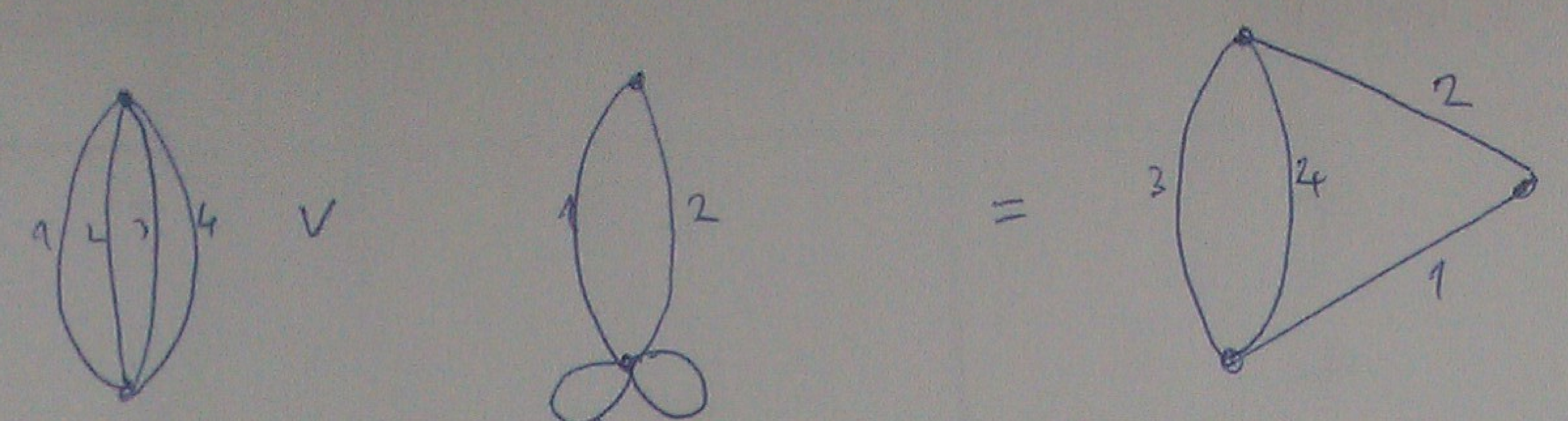
$\mathcal{M}_2=(E, \mathcal{F}_2)$

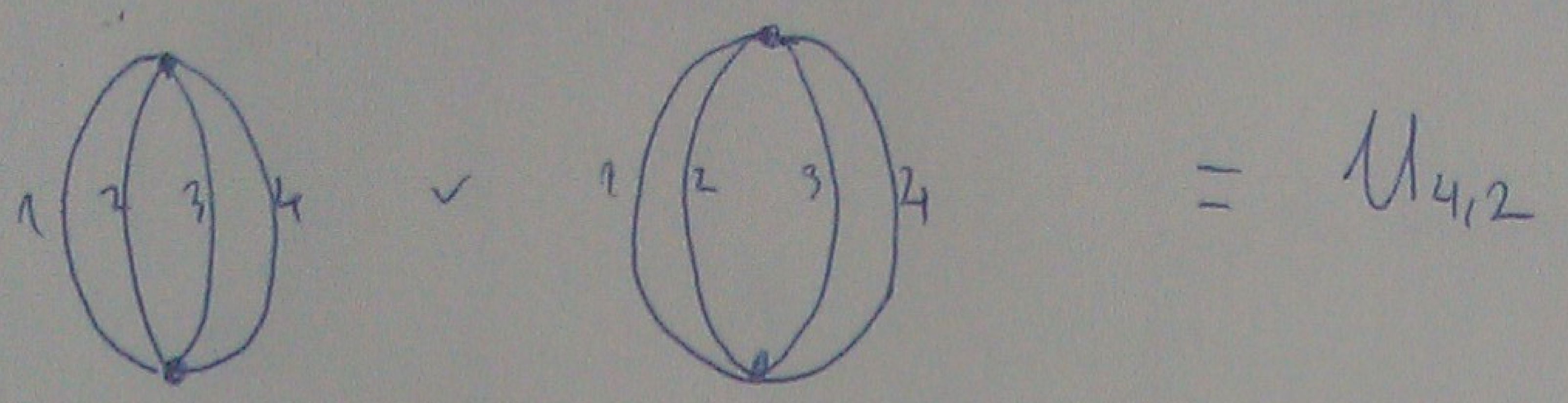
$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$

Egy tetsz. $X \subseteq E$-re X fgtlen $\Leftrightarrow$ előáll $X = X_1 \cup X_2$ alakban úgy, hogy $X_1 \in \mathcal{F}_1$ és $X_2 \in \mathcal{F}_2$.





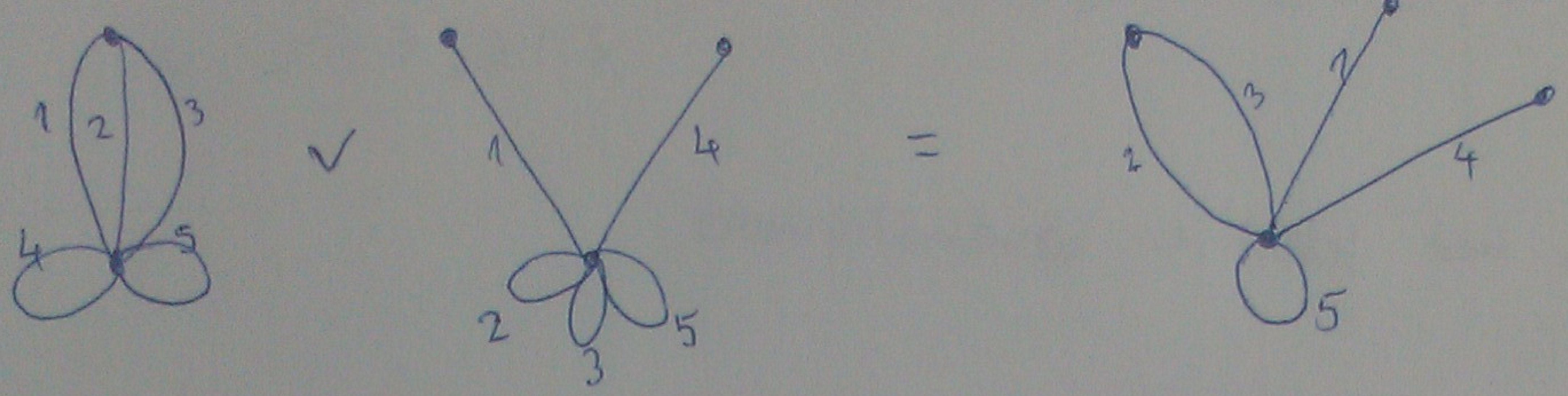




$= U_{4,2}$

összegképzés kivezethet a grafikusból

ilyen zh példa lesz!



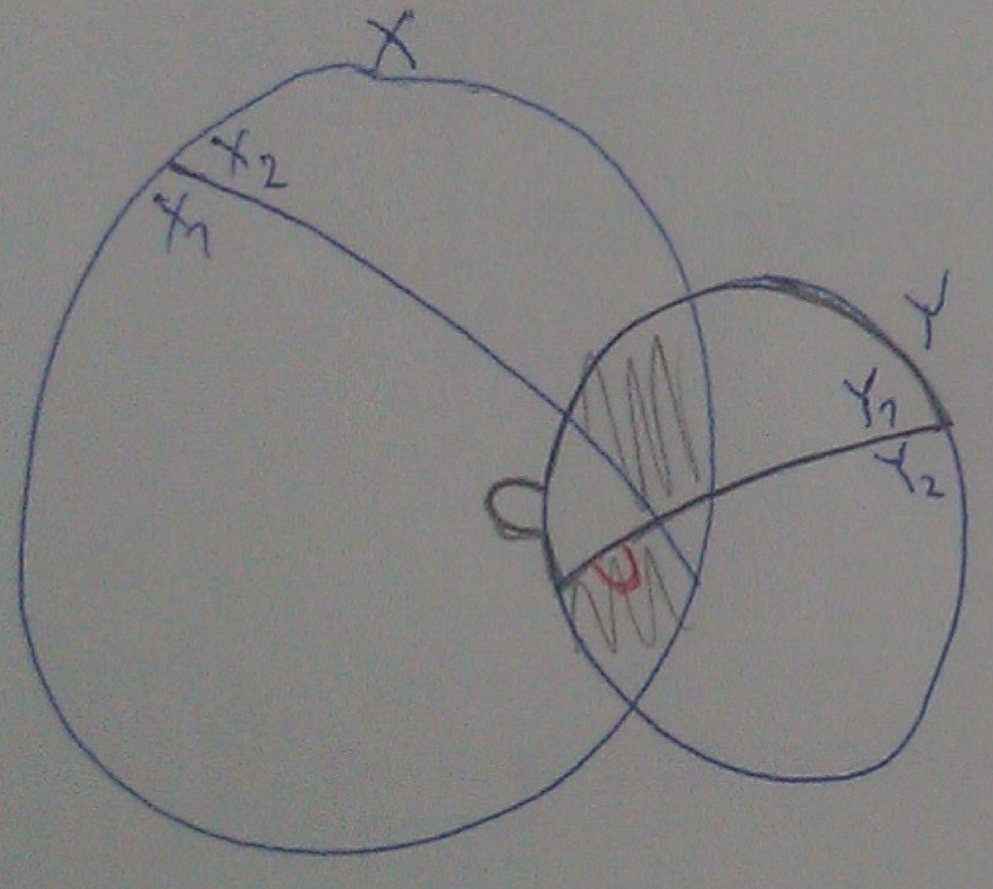
$X \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \Rightarrow X = X_1 \dot\cup X_2$ ← diszjunkt unió

$X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$X, Y \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ és $|X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X - Y$, hogy $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$

vagy $|X_1| > |Y_1|$ vagy $|X_2| > |Y_2|$ (vagy mindkettő)

pl 1



~~Tfh lenne ellenpélda~~

$X = X_1 \dot\cup X_2$
$Y = Y_1 \dot\cup Y_2$ } az összes ilyen felbontáspár közül, tekintsük azt, ahol az $|(X_1 \cap Y_2) \cup (X_2 \cap Y_1)|$ elemszáma minimális

---

$U_{n,k} \vee U_{n,l} = U_{n, \min(n, k+l)}$ k+l nem lehet nagyobb n-nél

~~zárt~~ marad-e abban	grafikus	lineáris	uniform
$\setminus$	+	+	+
$/$	+	+	+
$*$	− (síkbarajzolhatókra +)	(1-1 konkrét testre is +) +	+
$\oplus$	+	− (1-1 konkrét testre +)	−
$\vee$	−	− ($\mathbb{R}$ felett +)	+

~~Ex~~

$$\mathcal{M}_1 = (E_1, \mathcal{F}_1) \to \boxed{M_1}$$

$$\mathcal{M}_2 = (E_2, \mathcal{F}_2) \to \boxed{M_2}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \to \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$$

Input: k db matroid : $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{F}_i)$ $\quad i = 1 \dots k$

Kérdés: $\bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{M}_i \overset{?}{=} (E, 2^E)$

szabad matroid (minden fgtlen)

más szavakkal: $E \in \bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$

$E = E_1 \dot\cup E_2 \dot\cup \dots \dot\cup E_k$ úgy hogy $\forall i$-re $E_i \in \mathcal{F}_i$

$\boxed{k\text{-matroid partíciós probléma}} \in P$ (polinom időben megoldható)

ezt nagyon kell tudni!

Output: Igen és a partíció

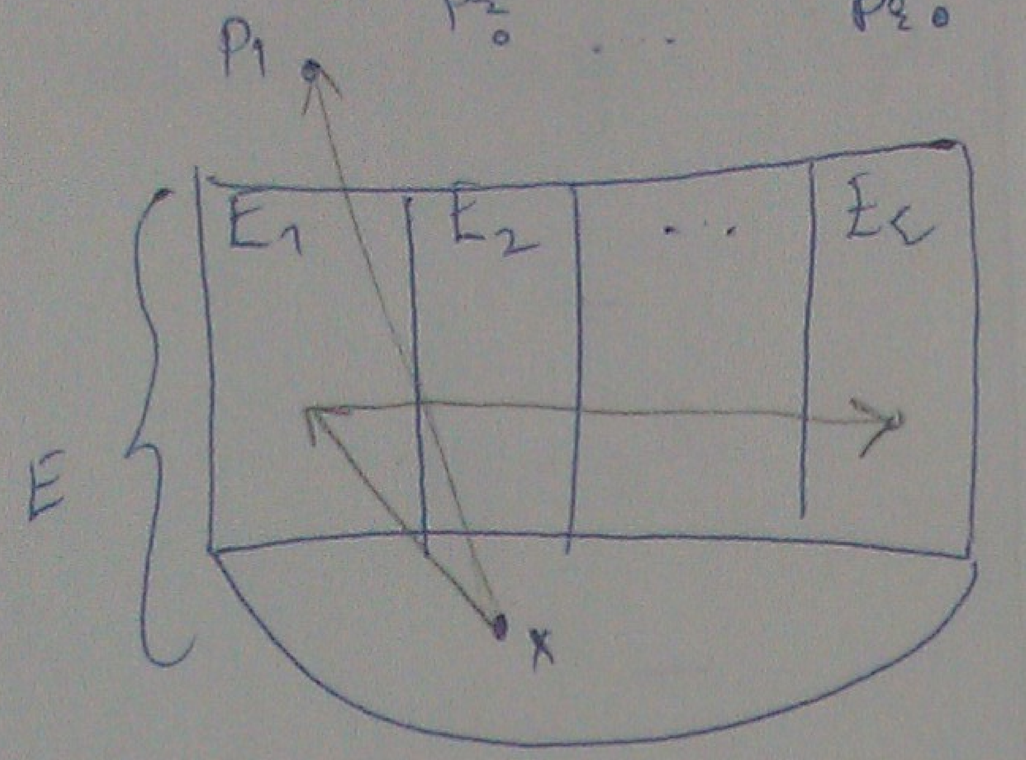
vagy

nem és $X \subseteq E$ úgy hogy $|X| > \sum_{i=1}^{k} r_i(X)$

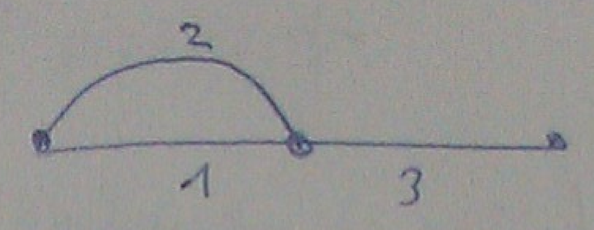
Algo:

0. lépés: $\forall i$-re $E_i \leftarrow \emptyset$ (E_i legyen az üres halmaz)

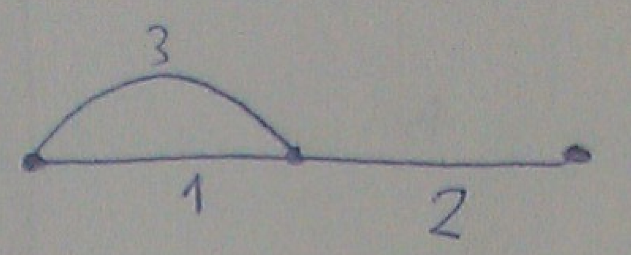
1. lépés: próbáljuk javítani ($\left|\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right|$ nagyobb legyen)



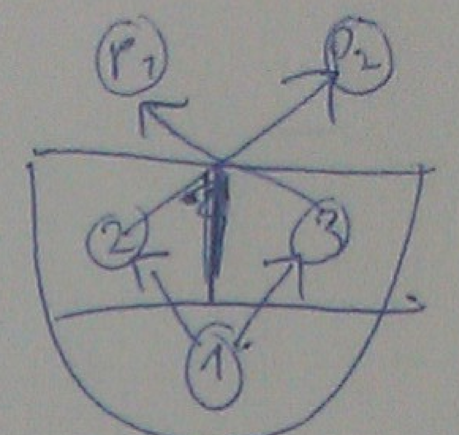
ha $E_1 \cup \{x\}$ éppen akkor tartalmazna
de, ha egyikhez sem vehetem
hozzá, de máshogy
particionálva lehet jó lenne



$E_1 = \{2\}$



$E_2 = \{3\}$



← segédgráf

$E_1 \leftarrow E_1 + ① - ②$

$E_2 \leftarrow E_2 + ②$

$E_1 = \{1\}$

$E_2 = \{2, 3\}$

segédgráf: $V = E \cup \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$

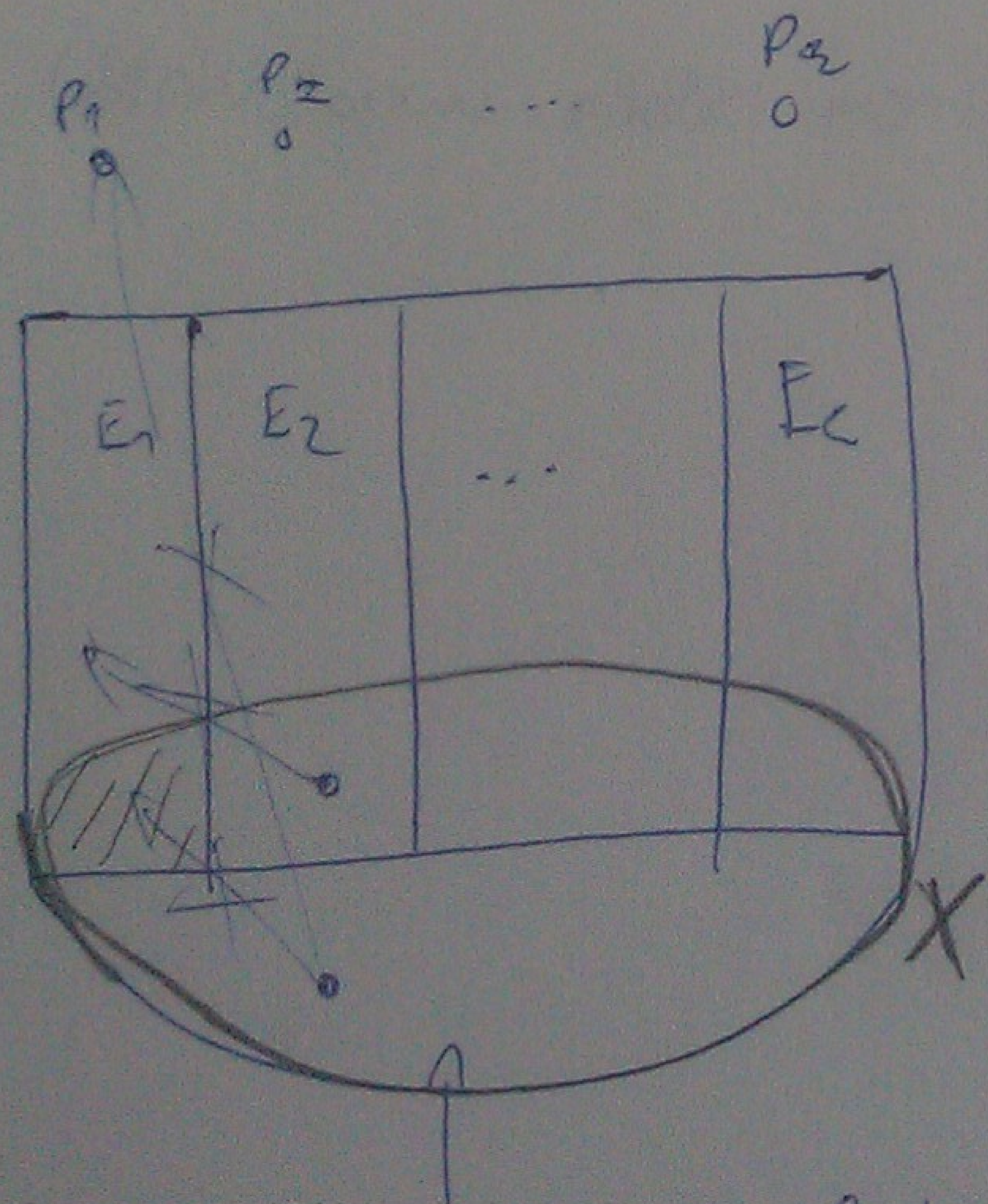
$\overrightarrow{(x,y)} \in$ Élhalmaz $\iff$ ○ vagy $y = p_i$; $x \notin E_i$, de $E_i \cup \{x\} \in \mathcal{F}_i$

$p_1 \leftarrow x$ (x valahol van) $E_1, \dots E_k$-ban vagy a maradt részben

○ vagy $x \notin E_i$; $E_i \cup \{x\} \notin \mathcal{F}_i$, de $(E_i \cup \{x\}) - \{y\} \in \mathcal{F}_i$

Tétel: (biz. nem kell)

Ha $\exists$ ir. út $E - (\bigcup E_i)$-ből $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$-ba, akkor egy legrövidebb ir. út mentén lehet javítani.



ha nem lehet innen eljutni a p_i-kbe, megakad

$$|X| > \sum_{i=1}^{k} r_i(X)$$

Biz: $|X| > \sum_{i=1}^{k} |X \cap E_i| = \sum_{i=1}^{k} r_i(X \cap E_i) =$

$= \sum_{i=1}^{k} r_i(X_i)$

?

lépésszám $\leq n\left(c(n+k)^2 + c(n+k)^2 + cn \right) \approx$ $\quad n = |E|$

útkeresés

algoritmus futási ideje

$c=5$ dolgot kell ellenőrizni

$n+k$ pont $\quad (n+k)^2$ pontpár

$\approx cn^3$

Még matroidok, jeeeah!

Matroid partíciós probléma volt legutóbb (MPP) k-MPP

↑ hány db matroid

Input: k db matroid

$M_i=(E,\mathcal{F}_i)$ $(i=1..k)$

Kérdés $\bigvee_{i=1}^{k} M_i=(E,2^E)$? (szabad matroid 2^E)

$\left[E=\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right.$ úgy hogy $\forall i$-re $\left.E_i\in\mathcal{F}_i\right]$

polinom időben megoldható

---

k-MMP (matroid metszet probléma)

Input k db Matroid

$M_i=(E,\mathcal{F}_i)$ $i=1,..,k$ és egy t szám

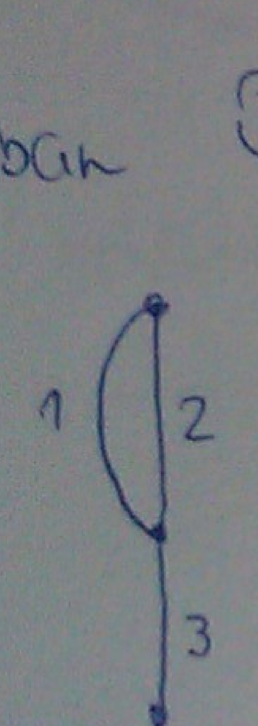
Kérdés: ~~van-e~~ $\exists$-e $X\subseteq E$, $|X|\geq t$ és $X\in\mathcal{F}_i$, $\forall i$-re

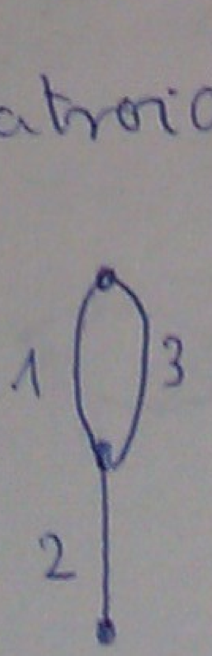
$\boxed{X\in\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{F}_i}$ legalább t elemű részhalmaz

közös független

- ha $k=1$? - mohó algoritmus -> bázis keresés
- $k\geq 2$ - mohó nem jó

Általában $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ nem matroid

$M_1=$ 

$M_2=$ 

független

∅

{1}, {2}, {3} -> nincs hurokél

{2,3}

ebből nem lehet bővíteni az {1}-et

3. axióma nem teljesül

---

k-MPP $\in P$ $\forall k$-ra

2-MMP $\in P$

ha $k\geq 3 \Rightarrow$ k-MMP viszont NP-nehéz

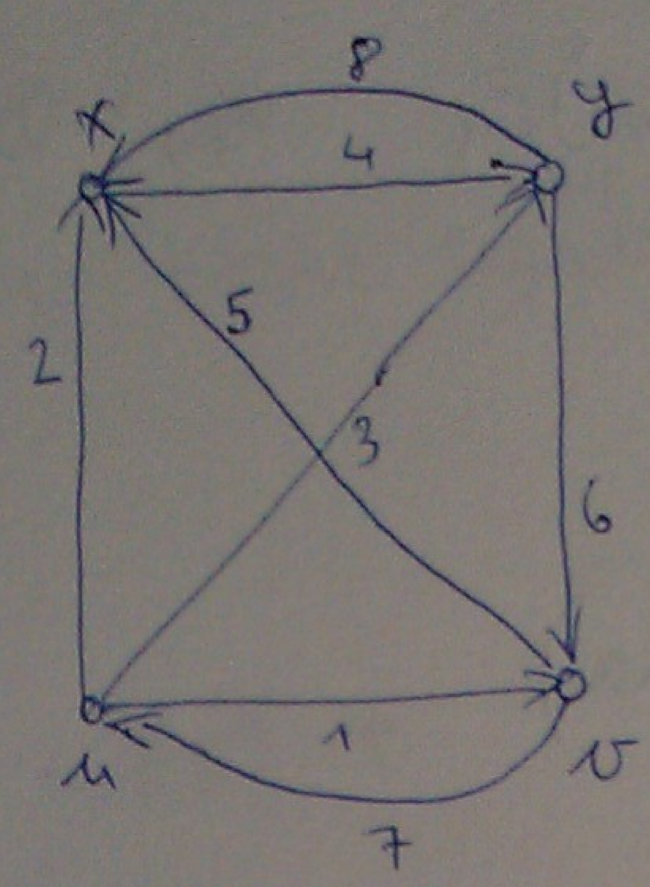
$k=3$-ra (NP-teljes ← H-kör -színezés)

erre visszavezetni

<u>Input:</u> $\vec{G}$; $u,v \in V(G)$ (irányított gráf)

<u>Kérdés:</u> ∃-e olyan ir. H-út, mely u-ban indul, v-ben ér véget?

Ezt visszavezetjük a 3 matroid metszetére, akkor az is NP-teljes



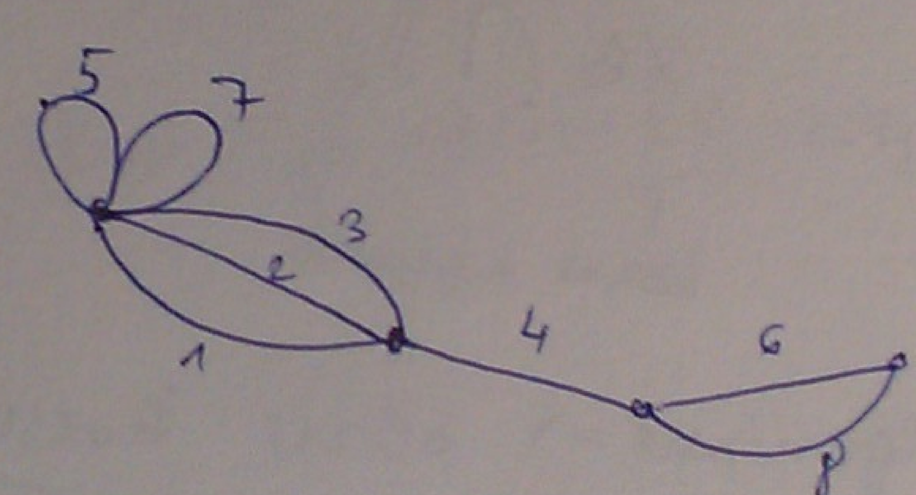
matroidok alaphalmaza

$E = E(G)$

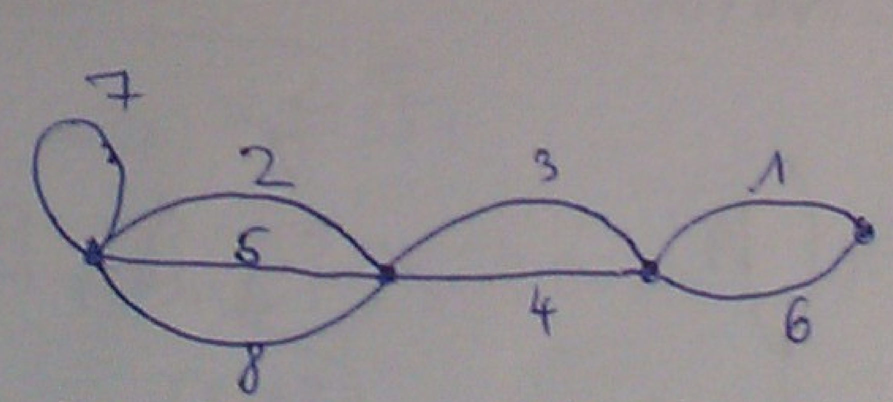
$X \subseteq E$-re

$X \in \mathcal{F}_1 \iff d_{ki}(v) = 0$; $\forall$ más pontra $d_{ki} \leq 1$

részgráfnak tekinthető



$X \in \mathcal{F}_2 \iff d_{be}(u) = 0$; $\forall$ más pontra $d_{be} \leq 1$



$t=3$ lesz van-e közös 3 elemű független

$\{1,4,8\}$

$\{2,4,6\}$ → ez lesz jó, de hogy döntöttük el? a 3. matroiddal.

$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}(G)$

$t = \underbrace{|V(G)|-1}_{\text{közös független száma}}$ → irányított H-út u-ból v-be

$k = 3 + x$ esetre
$x \geq 1$

ha 3-ra sikerül a biz, akkor ált. nagy k-ra is

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ mint előbb

$x \geq 1$-re $\mathcal{M}_{3+x} = (E, 2^E)$

szabad matroid

Most:

$(E, \mathcal{F}_1) = \mathcal{M}_1$
$(E, \mathcal{F}_2) = \mathcal{M}_2$
t

Van-e közös legalább t elemű fgtlen?

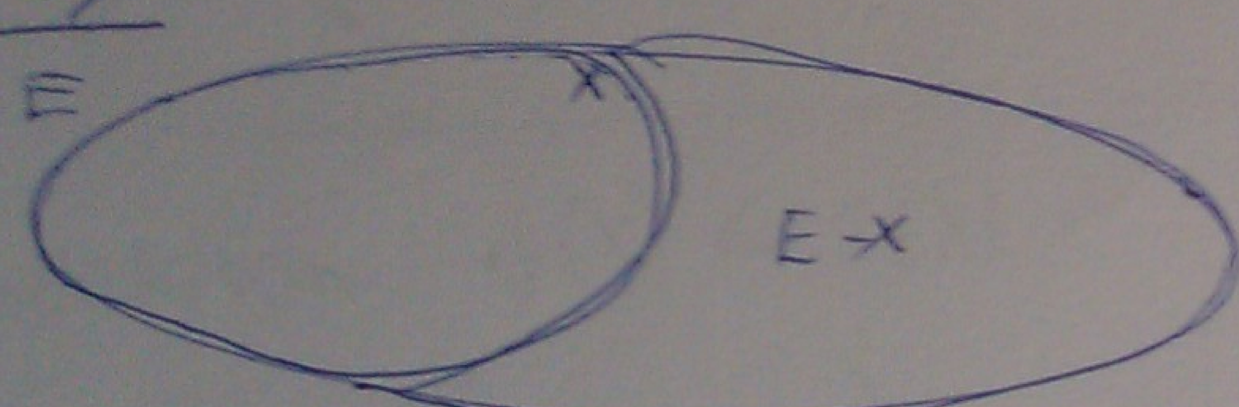
<u>1. spec. eset:</u> $r_1(E) = r_2(E) = t$ $\qquad n = |E|$

bázisok egyformán nagyok és egyezik t-vel
van-e két matroidnak közös bázisa
van-e két gráfban ugyanolyan fa

<u>áll:</u>
$\exists$ $\mathcal{M}_1$-nek és $\mathcal{M}_2$-nek közös bázisa $\Leftrightarrow$

$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2^* = (E, 2^E)$ (erre jó az MPP alg.)

<u>Biz</u> $\Rightarrow$



Ha X bázis $\mathcal{M}_1$-ben $\Rightarrow X \in \mathcal{F}_1$
—— " —— $\mathcal{M}_2$-ben $\Rightarrow E - X$ bázis $\mathcal{M}_2^*$-ban

$\Leftarrow$

$E = (X_1 \cup X_2)$ úgy, hogy $X_1 \in \mathcal{F}_1$ és $X_2 \in \mathcal{F}_2^*$

$|X_1| \leq t$ $[r_1(E)]$ $\qquad |X_1 \cup X_2| = n$ $\qquad |X_2| \leq n - t$

$\Rightarrow$ X_1 bázis $\mathcal{M}_1$-ben

$\Rightarrow$ X_2 bázis $\mathcal{M}_2^*$-ban $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ X_1 bázis $\mathcal{M}_2$-ben

Ha $t > r_1(E)$ vagy $r_2(E) \Rightarrow$ NEM

hány eleműek a függetlenek, ha t ennél nagyobb akkor értelmetlen

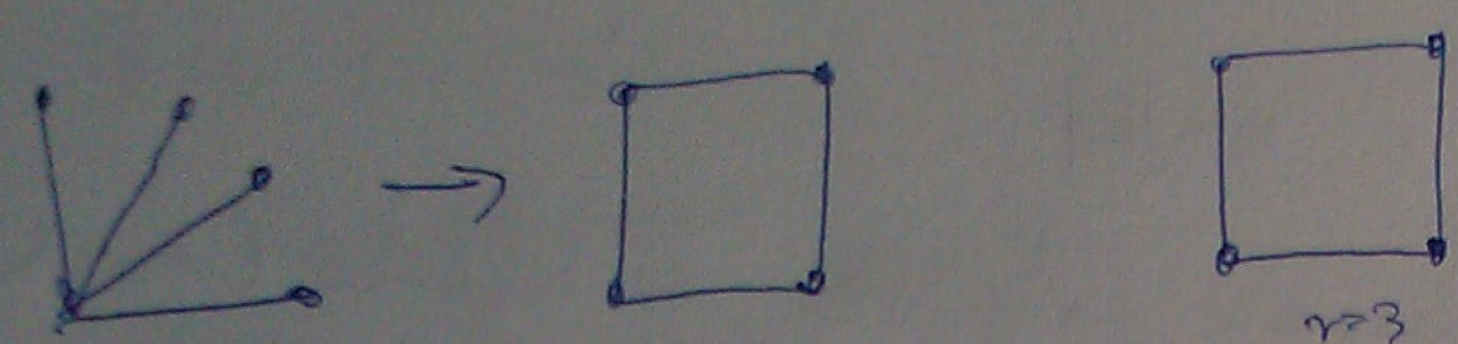
$M = (E, \mathcal{F})$, $r(E) = r$; $c < r$

Az M matroid c-rangra való <u>csonkolása</u>

<u>truncation</u>

$X \subseteq E$-re, X független a csonkolt matroidban $\iff$

$X \in \mathcal{F}$ és $|X| \leq c$



$r=4$ → $r=3$ → $r=3$ → $U_{4,2}$ $r=2$

$U_{4,2}$ →  $U_{5,3} \to U_{5,2}$

$r=2$ $r=1$ $r=3$ $r=2$

M_1-et és M_2-t is t-rangúra csonkoljuk $\Rightarrow$ spec. eset

---

<u>Polimatroidok</u>

E; $f: 2^E \to \mathbb{Z}_0^+$

minden részhalmazhoz hozzá rendel egy nemnegatív egész számot

← matroidok rangfüggvényeinek tulajdonságaival

① $f(\emptyset) = 0$

② Ha ~~X ∈~~ $X \supseteq Y \Rightarrow f(X) \geq f(Y)$

③ $f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$

---

④ $f(X) \leq |X|$

ez helyett, mert ezt nem kérjük

$\forall x \in E$-re $f(\{x\}) \leq k$

k-polimatroid-rangfüggvény ↑

Ha $X \subseteq E \Rightarrow f(X) \le k \cdot |X|$

---

1. példa: Legyen adva E-n k db matroid $(E, \mathcal{M}_i)$; r_i rangfgv-nyel
$i = 1, \dots, k$

$f(X) = \sum_{i=1}^{k} r_i(X)$ ①–④ teljesül

2. példa: Legyen $G(V,E)$ tetsz. gráf, $X \subseteq E$-re

$f(X) =$ az X-beli élek által lefedett pontok száma

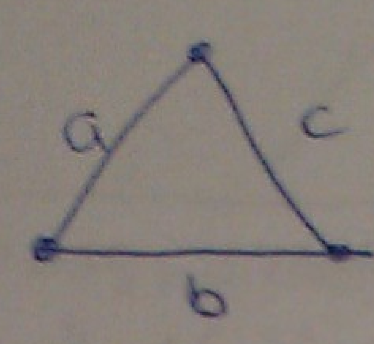
Ez egy 2-polimatroid rangfgv lesz

2 pont

③ nem triviális

X él x db ponton
Y él y db ponton fedné a

X∩Y lehet kevesebb



$X = \{a, b\}$

$Y = \{a, c\}$

$f(X) = 3$ $f(X \cup Y) = 3$

$f(Y) = 3$ $f(X \cap Y) = 2$

ez csak vázlat $3+3 > 3+2$

A 2. példában $f(X) \le 2|X|$ itt $=$ teljesül $\Leftrightarrow$ X ftlen élhalmaz

$\Leftrightarrow$ párosítás (matching)

Tetsz. k-polimatroid rangfgv esetén $X \subseteq E$-re, ha

$f(X) = k \cdot |X| \Rightarrow X$ egy k-matching

Mi ez az 1. példában? $f(X) = k \cdot |X| \Leftrightarrow k \cdot |X| = \sum_{i=1}^{k} r_i(X) \le \sum_{i=1}^{k} |X| = k \cdot |X| \Leftrightarrow$

itt = van

$\Leftrightarrow r_i(X) = |X|$

$X \in \mathcal{F}_i$

$\Updownarrow$

$X \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i \rightarrow \boxed{k\text{-MMP}}$

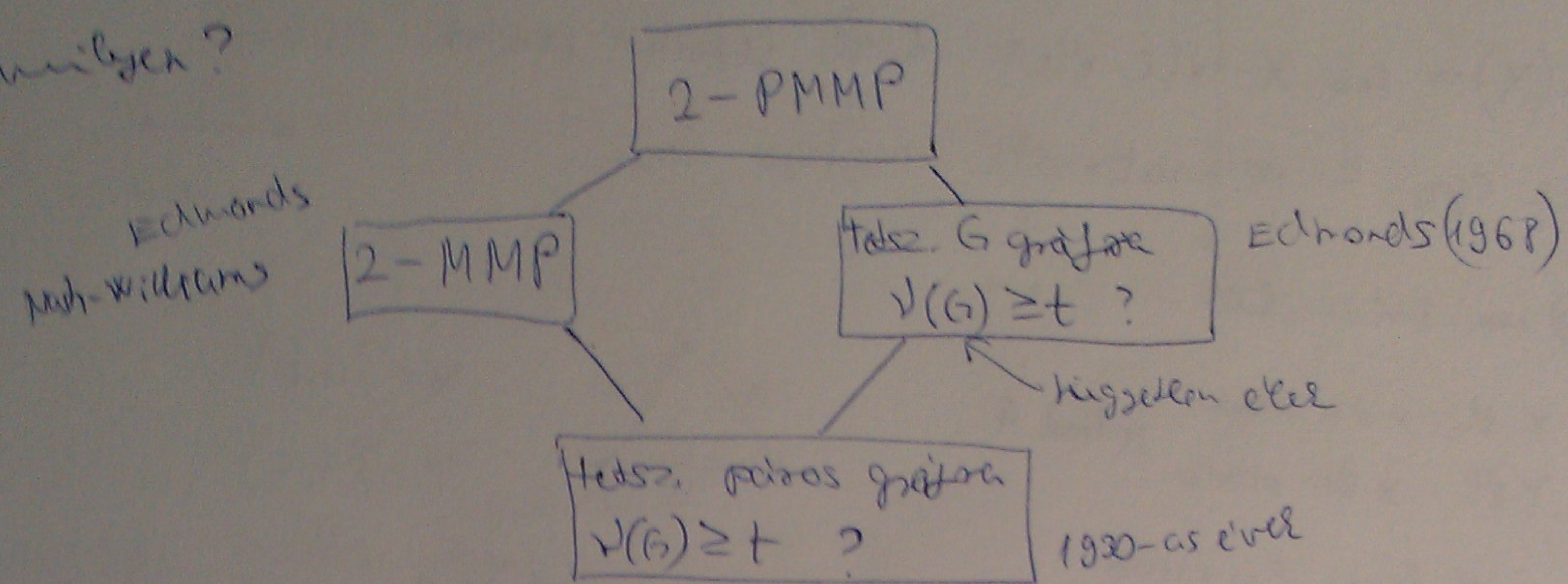
k-PMMP

<u>Input</u>: egy k-polimatroid rangfgv és t szám

<u>Kérdés</u>: $\exists$-e $X \subseteq E$, $|X| \geq t$ és X egy k-matching?

$k \geq 3$-ra k-PMMP $\in$ NP-nehéz mert spec. esetként tartalmazza a k-MMP-t

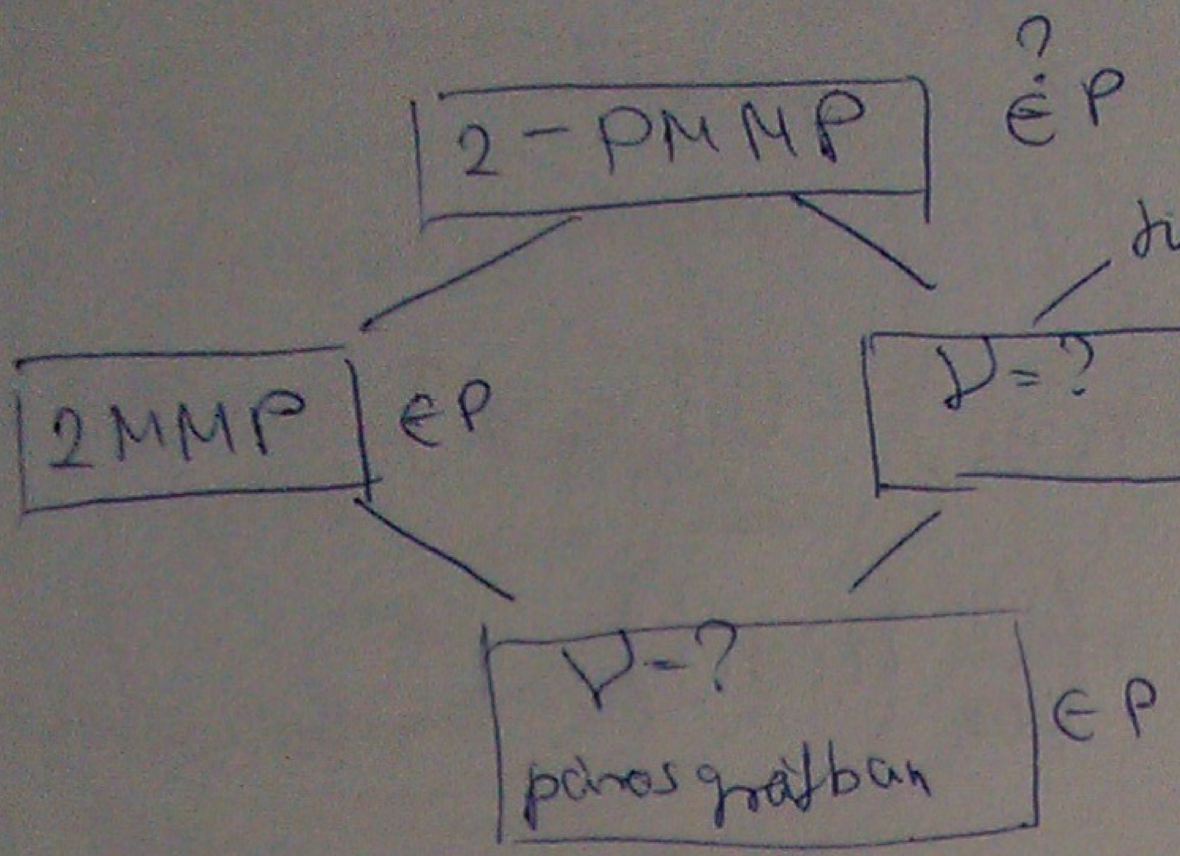
2-PMMP milyen?



$G = (A \cup B, E)$ páros gráf

$\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{F}_1)$-ben $X \in \mathcal{F}_1 \iff$ ha X-élek A-beli végpontjai különbözőek

$\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ ben . . . . . . B-beli . . .



Lawler szerint P-beli a 2-PMMP

! 2-PMMP $\notin P$! de nem tudjuk, hogy NP-beli-e

<u>k-PMMP:</u>

$f : 2^E \to \mathbb{Z}_0^+$

(1) $f(\emptyset) = 0$

(2) $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y)$

(3) submoduláris

(4) $\forall x \in E$-re $f(\{x\}) \leq k$ ← ettől k

---

k-polimatroid rangfgv

$\forall X \subseteq E$-re $f(X) \leq k \cdot |X|$

k-matching olyan, hogy $=$

(2 félét mondott, de a másikra gondoltam, [szerintem vizsgáztató bizonyítja])

Ha $|E| = n \Rightarrow \nexists$ olyan alg., melyre a lépésszám $\leq p(n)$ ← polinom

$$f(X) = \begin{cases} 2 \cdot |X| & \text{, ha } |X| < \frac{n}{2} \\ \in \{n-1, n\} & \text{, ha } |X| = \frac{n}{2} \\ n+1 & \text{, ha } |X| > \frac{n}{2} \end{cases}$$

véletlen választás

? homályosan adjuk meg n-re legyen egyértelmű

(2^n lépésszámban meg lehet oldani = ugyanaz van-e k-matching mindre)

Kérdés: $\exists$-e $\frac{n}{2}$ méretű 2-matching?

$\binom{n}{\frac{n}{2}}$ féle $\frac{n}{2}$ méretű halmaz van exp. fv-e n-nek

n-1-et v. n-et választok

2 cikk egyidejűleg ezzel kapcs.:

- Lovász ⟶ spec. esetre csinált polinom idejű alg.-ot $\left[O(n^{17})\right]$
- Korte-Jensen ↓

$\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ $\quad E=\{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ky_k\} = \bigcup_{i\in I}\{x_iy_i\}$ $\quad I=\{1,2,\dots,k\}$

Az I indexhalmazon def: $f(J) = r\left(\bigcup_{i\in J}\{x_iy_i\}\right)$ ← 2-polimatroid rangfv. lesz

$J\subseteq I$

<u>Lovász tétele</u>

Ha $\mathcal{M}$ egy a $\mathbb{R}$ felett koordinátázott matroid, akkor az ilyen f-ekre a 2PMMP $\in$ P. (biz nem kell) ← konkrétan kell tudni azt a valós elemű mátrixot

---

$\vee$: összeg

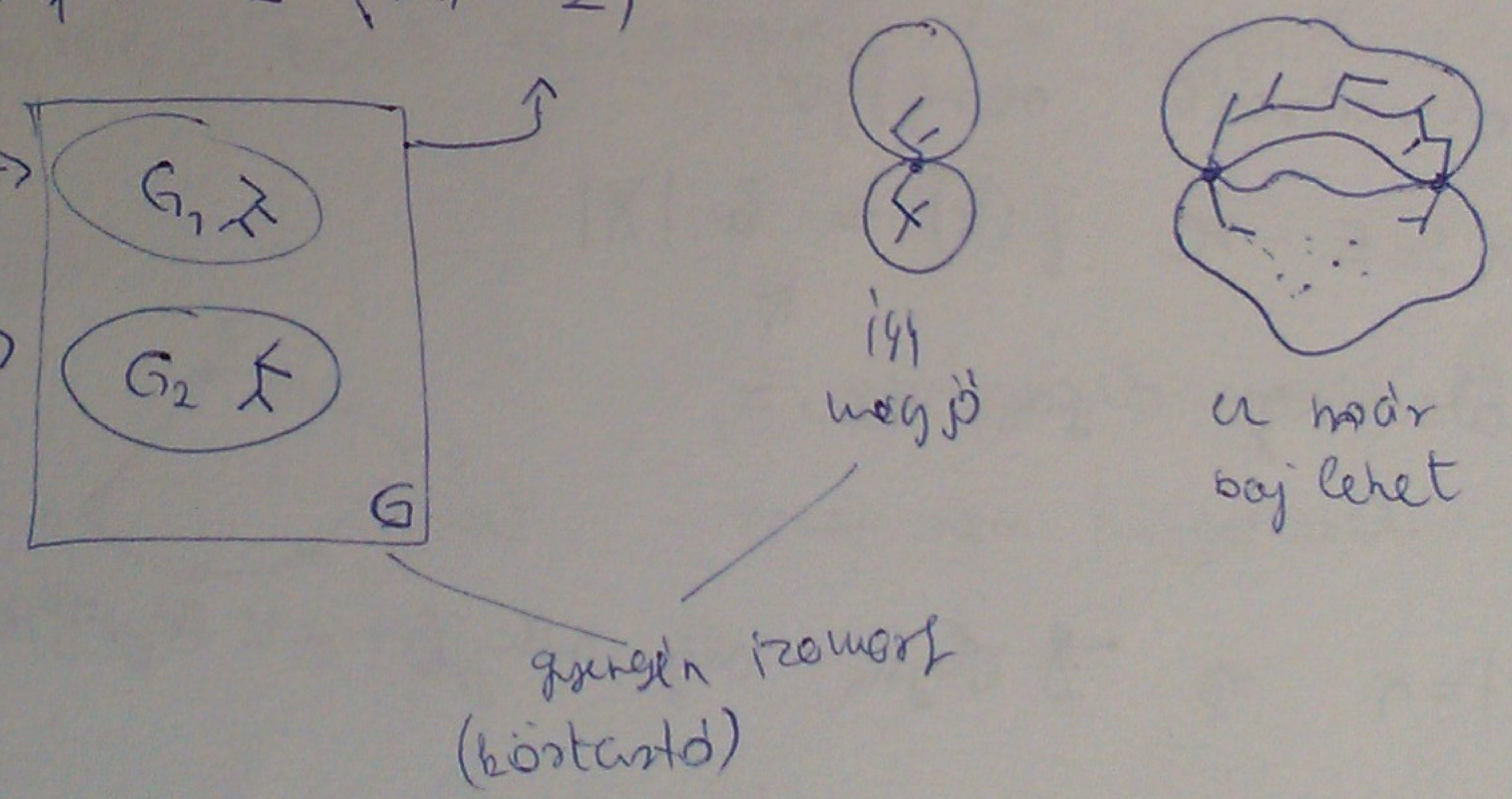
$\oplus$: direkt összeg

Ha $E_1\cap E_2=\emptyset$

$\mathcal{M}_1=(E_1,\mathcal{F}_1)$

$\mathcal{M}_2=(E_2,\mathcal{F}_2)$

$\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2=(E_1\cup E_2,$



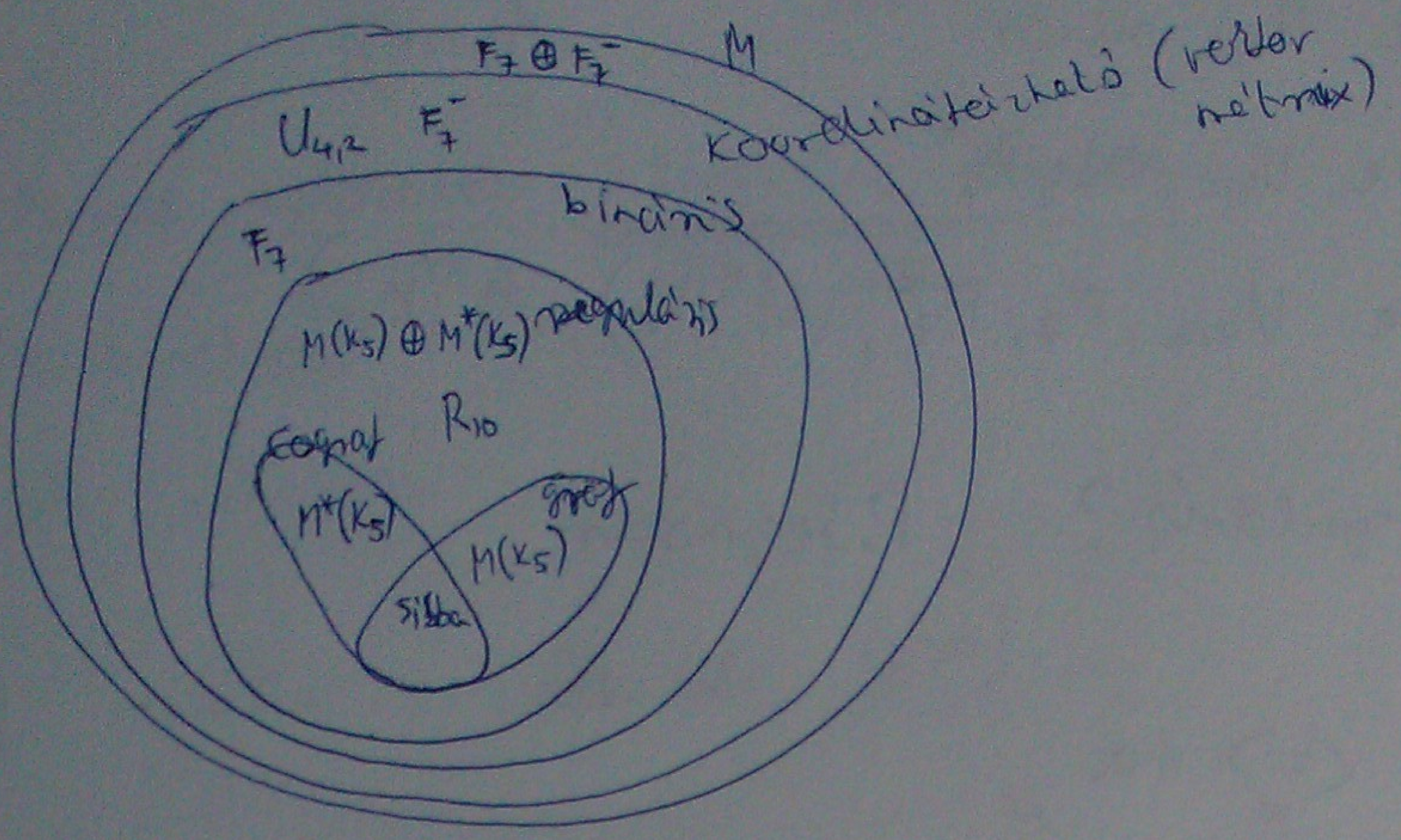
<u>Def:</u>

Egy matroid <u>összefüggő</u>, ha nem áll elő két matroid direkt összegeként.

<u>Tétel:</u>

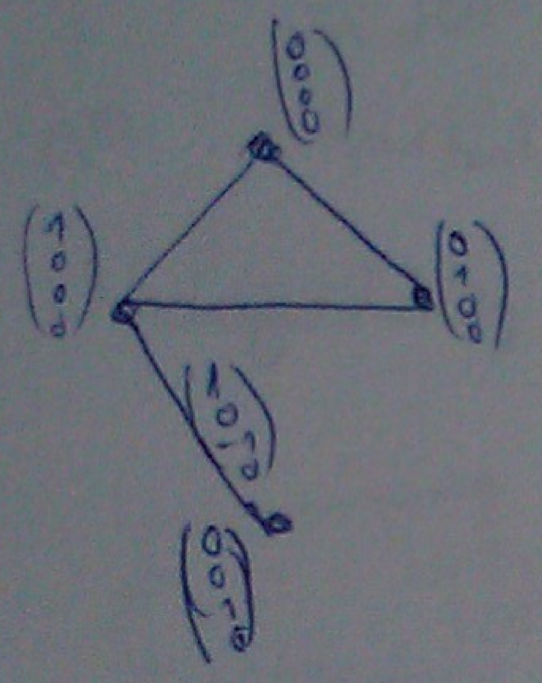
$\mathcal{M}(G)$ [G gráfból előálló] összefüggő $\Longleftrightarrow$ G 2-pont öf.

← 2-szeresen öf.



∀ grafikus matroid reguláris (minden test felett koordinátázható)

Legyen G egy tetsz. gráf és T egy tetsz. test ⟹ M(G) hogyan koordinátázható T felett?



(először pontokra írunk vektorokat)

Ha egy él $e = \{p_i, p_j\}$ akkor e | $\underline{v_i} - \underline{v_j}$

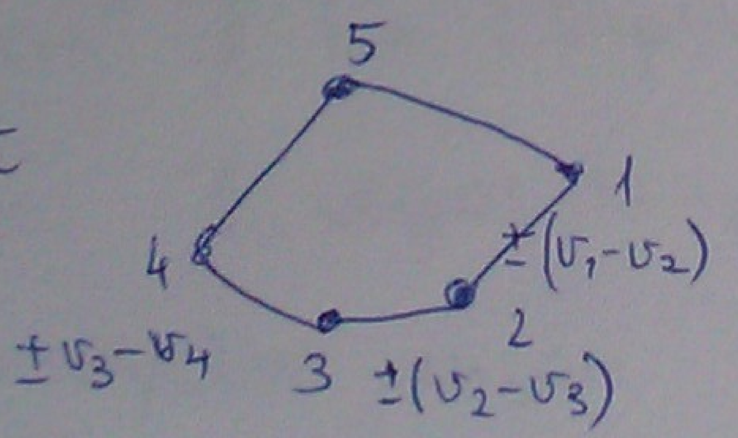
↑ pont ↑ p_i vektora

Áll: ez egy jó koordinátázás

~~Biz~~ Ha G' részgráf körmentes ⟺ ezek a vektorok lin. függetlenek T ~~függetlenek~~ felett

Biz: ⟸ indirekt

Tfh tartalmaz kört



ezek összege azonosan 0 tehát nem függetlenek

⟹ ~~indirekt~~ indirekt

Tfh a vektorok lin. összefüggőek

$\sum \lambda_i \underline{x_i} = \underline{0}$

és nem $\forall_i$-re $\lambda_i = 0$

nem triviális lin. komb.

$$\lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \quad \pm 1 \quad \pm 1 \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

hogy kiessen

⇓

G'-ben minden pont foka ≥ 2

⇓

∃ kör

⇓

↯

M bináris $\iff$ $\nexists$ benne $U_{4,2}$ minor (TUTTE)

M reguláris $\iff$ $\nexists$ benne $U_{4,2}, F_7, F_7^*$

M grafikus $\iff$ $\nexists$ benne $U_{4,2}, F_7, F_7^*, M^*(K_5), M^*(K_{3,3})$

hogy lehet bebiz. hogy M reguláris? P. Seymour

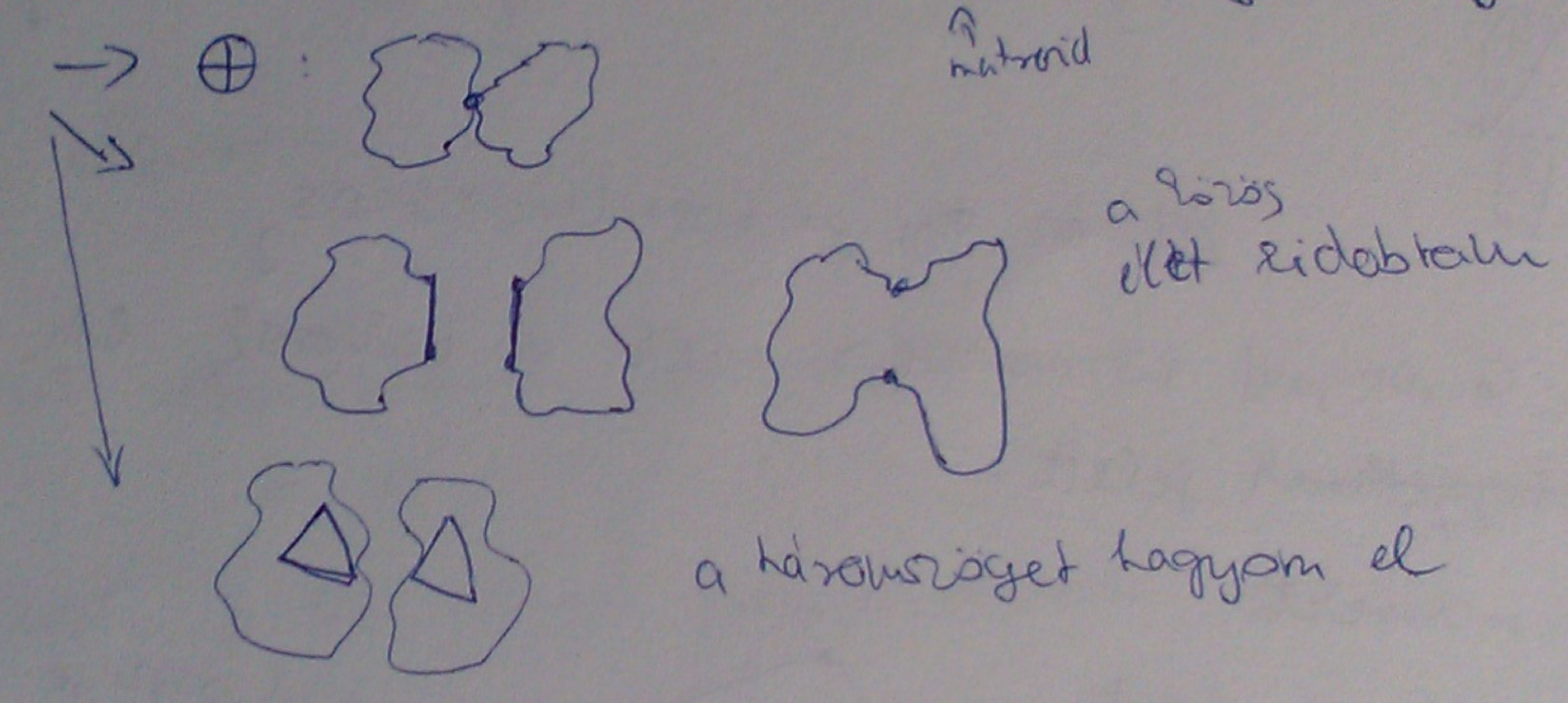
Egy matroid reguláris $\iff$ ha

a $\mathbb{Q}$ test felett olyan mátrixszal is koordinátázható, ami totálisan unimoduláris. ← hogy lehet eldönteni h egy mátrix tot. unimod.?

minden négyzetes részmátrix det. kell
nem polinom.

P. Seymour:

Egy matroid reguláris $\iff$ véges sok lépésben előállítható egy grafikus matroidból, egy kografikusból és R_{10} nevű példányából (matroid) 3 féle művelettel → $\oplus$:



R_{10}: → $\mathbb{Q}$ test felett

$$\begin{array}{cc} & \text{10} \\ 5 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

minden oszlopban 3db 1-es, 2db 0