

Nagypélda

Egy diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása, ahol a_{12} paraméter, a következő:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= a_{12} x_2 + 2 u, \\ x_2[k+1] &= 0,5 x_1 + x_2 - 2u, \\ y[k] &= x_1[k] - x_2[k]. \end{aligned}$$

a) Az a_{12} paraméter mely értékei mellett létezik a rendszer átviteli karakterisztikája? (3 pont)

b) Számítsa ki a rendszer átviteli karakterisztikáját, ha $a_{12} = -1$! (4 pont)

c) A rendszer gerjesztőjele: $u[k] = 5 + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} k\right)$.

c1) Adja meg e gerjesztőjel periódusát! (1 pont)

c2) Számítsa ki a rendszer válaszjelét! (2 pont)

a)
$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \\ 0,5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 0,5 a_{12} = \lambda^2 - \lambda - 0,5 a_{12}$$

Egyik megoldás (Jury kritérium alapján)

$P(\lambda=1) = -0,5 a_{12} > 0 \rightarrow a_{12} < 0$

$P(\lambda=-1) = 2 - 0,5 a_{12} > 0 \rightarrow a_{12} < 4$

$|-0,5 a_{12}| < 1 \rightarrow |a_{12}| < 2$

$$\left. \begin{aligned} a_{12} < 0 \\ a_{12} < 4 \\ |a_{12}| < 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow -2 < a_{12} < 0$$

Másik megoldás: $\lambda_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 0,5 a_{12}}$

Ha $a_{12} > -0,5$ $\lambda_1 = 0,5 + \sqrt{0,25 + 0,5 a_{12}} < 1$

$0,5 a_{12} < 0 \rightarrow a_{12} < 0$

$\lambda_2 = 0,5 - \sqrt{0,25 + 0,5 a_{12}} > -1$

$2 > 0,5 a_{12} \rightarrow a_{12} < 4$

Ha $0,5 a_{12} < -0,5$; $\lambda_{1,2} = 0,5 \pm j \sqrt{-0,25 - 0,5 a_{12}}$

$|\lambda_{1,2}|^2 = 0,25 + (-0,25 - 0,5 a_{12}) < 1$; $a_{12} > -2$

$$\left. \begin{aligned} a_{12} < 0 \\ a_{12} < 4 \\ a_{12} > -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow -2 < a_{12} < 0$$

3 pont (Csak egy megoldás értékelhető)

b) $H(e^{j\vartheta}) = \underline{c}^T (e^{j\vartheta} \underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{b} + d$

$$(e^{j\vartheta} \underline{E} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} e^{j\vartheta} & 1 \\ -0,5 & e^{j\vartheta} - 1 \end{vmatrix}$$

$\det(e^{j\vartheta} \underline{E} - \underline{A}) = e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,5$

$$(e^{j\vartheta} \underline{E} - \underline{A})^T = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} & -0,5 \\ 1 & e^{j\vartheta} - 1 \end{bmatrix}$$

$\text{adj}(e^{j\vartheta} \underline{E} - \underline{A}) = \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} - 1 & -1 \\ 0,5 & e^{j\vartheta} \end{bmatrix}$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\underline{c}^T \text{adj}(e^{j\vartheta} \underline{E} - \underline{A}) \underline{b}}{\det(e^{j\vartheta} \underline{E} - \underline{A})} + d = \frac{[1 \quad -1] \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} - 1 & -1 \\ 0,5 & e^{j\vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,5} = \frac{[1 \quad -1] \begin{bmatrix} 2e^{j\vartheta} \\ -2e^{j\vartheta} + 1 \end{bmatrix}}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,5}$$

$H(e^{j\vartheta}) = \frac{4e^{j\vartheta} - 1}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,5} = \frac{4e^{-j\vartheta} - e^{-j2\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,5e^{-j2\vartheta}}$ 4 pont

c1) L = 8

1 pont

- 161,72°

$$c2) \quad H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=0} = \frac{3}{0,5} = 6 \quad H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=\frac{3\pi}{4}} = \frac{-2\sqrt{2} + j2\sqrt{2} - 1}{-j + \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} = 2,2766 e^{-j2,8226}$$

$$- 2,1618 - j 0,7140$$

$$y[k] = 30 + 4,5533 \cos\left(\frac{3\pi}{4}k - 2,8226\right) \quad 2 \text{ pont}$$

Kispéldák

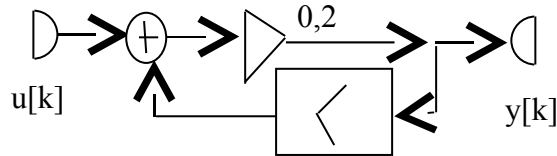
1.) . Adja meg az $x(t) = 5 \cos 6 t + 5 \sin 5 t$ szinuszos FI jel komplex amplitúdóját! (1 pont)

$$\bar{X} = 5 - j 5 = 5 \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad 1 \text{ pont}$$

2.) A 4 periódusú $x[k]$ DI jel komplex Fourier együtthatói: $X_0^C = 2$, $X_1^C = 1 + j$, $X_2^C = 2$. Írja fel a jel **valós** Fourier sorát! (1 pont)

$$x[k] = 2 + 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos \pi k \quad 1 \text{ pont}$$

3.



Adja meg a DI rendszer átviteli karakterisztikáját, ha létezik!

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0,2}{1 - 0,2 e^{-j\vartheta}} \quad 1 \text{ pont}$$

4.) Adja meg az $x(t) = 3 \varepsilon(t) e^{-4t}$ FI jel Fourier transzformáltját, ha létezik! (1 pont)

$$X(u \omega) = \frac{3}{j \omega + 4} \quad 1 \text{ pont}$$

5.) Az $x_1[k]$ illetve az $x_2[k]$ DI jel Fourier transzformáltja $\frac{2}{1 - 0,5 e^{-j\vartheta}}$ illetve $\frac{5}{1 + 0,5 e^{-j\vartheta}}$. Adja meg a két jel **konvolúciója** Fourier transzformáltjának kifejezését! (1 pont)

$$F \{x_1[k] * x_2[k]\} = \frac{2}{1 - 0,5 e^{-j\vartheta}} \cdot \frac{5}{1 + 0,5 e^{-j\vartheta}} = \frac{10}{1 - 0,25 e^{-j2\vartheta}} \quad 1 \text{ pont}$$