Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. október 18.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy 100 csúcsú, 101 élű, izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van Euler-körsétája. Igaz-e, hogy ekkor biztosan van teljes párosítása is?

* * * * *

A fokszámok összege a gráfban 202, az egyes fokszámok pedig 0-nál nagyobb páros számok, (1 pont)
hiszen a gráfban nincs izolált pont (1 pont)
és van Euler-körséta. (1 pont)
Mivel a gráfnak 100 csúcsa van, ez csak úgy lehetséges, ha 99 darab 2 fokú és 1 darab 4 fokú csúcs van a gráfban. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy a gráf két, egy csúcsban érintkező körből áll. (1 pont)
Indítsuk a 4 fokú csúcsból (nevezzük A-nak) az Euler-körsétát. Az Euler-körséta azon része, mely az A csúcsba való első visszatérésig tart, kör kell, hogy legyen, hiszen összefüggő és minden csúcs foka 2 benne. (1 pont)
Hasonlóan kör lesz a körséta A-ból történő második indulást követő része is. (1 pont)
A két körnek nincs közös éle, közös pontjuk egyedül A és együtt a körséta (és így a gráf) összes élét tartalmazzák. (1 pont)
Mivel a két kör hosszainak összege 101 (hiszen A mindkettőben benne van), az egyik kör páros, a másik páratlan hosszú. (1 pont)
A páros körnek van teljes párosítása, a páratlan körből A-t elhagyva (ezek éppen a páros körben nem szereplő csúcsok) páros csúcsú utat kapunk, aminek ugyancsak van teljes párosítása, a két párosítás együtt a gráf egy teljes párosítását alkotja, tehát a feladat kérdésére a válasz igenlő. (1 pont)

Megjegyzés: A két, egy csúcsnál találkozó körnek lehet egy (hurokél) vagy két (párhuzamos élek) csúcsa is, hiszen a gráf nem feltétlenül egyszerű, ez azonban a bizonyítást nem befolyásolja. E megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot, ha azonban valaki kitér rá és nem kapna maximum pontot a feladatra, akkor adhatunk érte 1 pontot.

2. Egy 20 csúcsú, egyszerű, összefüggő gráfban minden csúcs foka legalább 7, tudjuk továbbá, hogy van olyan éle, melyet elhagyva a gráf két komponensre esik szét. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van Hamilton-útja.

* * * * *

Hagyjuk el a feladat szövegében szereplő élet (mely fusson az A és a B csúcsok között) a gráfból. A keletkező két komponens mindegyikében egy 6 fokú és néhány 7 fokú csúcs lesz, (1 pont)
a komponensek elemszáma tehát legalább 8. (2 pont)
Ebből következik, hogy mindkét komponensben legfeljebb 12 csúcs lehet. (2 pont)
Dirac tétele szerint mindkét komponensben lesz tehát Hamilton-kör, (2 pont)
mivel mindkét komponens egyszerű gráf. (1 pont)
A két Hamilton-körből egy A-ra, illetve egy B-re illeszkedő élet elhagyva a komponensekben egy A-ból, illetve B-ből induló Hamilton-utat kapunk, (1 pont)
melyekhez az AB élet hozzávéve a gráf egy Hamilton-útja adódik. (1 pont)

3. Egy G gráf csúcsai legyenek a 10-nél nem nagyobb pozitív egészek. Két csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő egészek relatív prímek (vagyis legnagyobb közös osztójuk 1). Határozzuk meg $\tau(G)$-t, azaz a lefogó pontok minimális számát G-ben.

* * * * *

A páratlan számok lefogó ponthalmazt alkotnak, (2 pont)
hiszen semelyik két páros szám között nem megy él, (1 pont)
mivel legnagyobb közös osztójuk legalább 2. (1 pont)
Így $\tau(G) \leq 5$. (1 pont)
Minden páratlan szám és a nála eggyel nagyobb páros szám között fut él, hiszen a szomszédos számok relatív prímek, (2 pont)
így a gráfban létezik 5 élű párosítás, (1 pont)
azaz $\nu(G) \geq 5$. Az előadáson tanult $\nu(G) \leq \tau(G)$ egyenlőtlenséget használva $\nu(G) = \tau(G) = 5$ adódik. (2 pont)

4. Egy gráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha kitörlünk a gráfból néhány, egy pontban csatlakozó élet, akkor a kapott gráf kromatikus száma legalább 9.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy az éltörlések után kapott G gráf kromatikus száma legfeljebb 8. (1 pont)
Tekintsük G egy jó 8-színezését és változtassuk meg ebben a törölt élek közös végpontjának színét egy új, 9. színre, (3 pont)
majd tegyük vissza a törölt éleket. Megmutatjuk, hogy a kapott színezés jó, mivel bármely a és b összekötött csúcsok különböző színűek. (1 pont)
Ha az ab él szerepel a G gráfban, akkor a és b különböző színűek, hiszen G-t jól színeztük. (2 pont)
Ha az ab élet hozzávettük G-hez, akkor a két csúcs színe azért különböző, mert pontosan egyiküket az új, 9. színnel színeztük. (2 pont)
Az eredeti gráf tehát színezhető 9 színnel, ami ellentmondás, így G sem volt legfeljebb 8 színnel színezhető. (1 pont)

5. Legyenek egy gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői, két különböző csúcsot akkor kössünk össze, ha a megfelelő mezők legfeljebb három lépésben elérhetők egymásból királlyal. (A király egy lépésben egy mezőt halad vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan.) Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A tábla bármely 4×4-es összefüggő részéhez (például a bal felső 4×4 mezőhöz) tartozó csúcsok klikket alkotnak a gráfban, hiszen bármelyik kettö elérhető egymásból a király legfeljebb három lépésével. (2 pont)
Így a gráf klikkszáma legalább 16, (1 pont)
ezért a színezéshez legalább 16 színre lesz szükség. (1 pont)
16 színnel ugyanakkor a gráf megszínezhető: osszuk a táblát 4 darab 4×4-es részre, (2 pont)
s a 4 részt (amik mind 16-os klikkeket alkotnak) színezzük meg ugyanazzal a 16 színnel oly módon, hogy a bal felső 4×4-es rész színezését másoljuk le a többi részben, vagyis azokat a csúsokat színezzük az i. színnel, amelyek a bal felső rész i. színű mezőjéből épp 4 egyirányú vízszintes, függőleges, illetve átlós lépéssel érhetők el (királlyal). (3 pont)
Az utóbbi megjegyzésből látható, hogy azonos színű csúcsok között nem megy él, vagyis ez a színezés csakugyan megfelelő. (1 pont)

6. Határozzunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális s-t vágást.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Jó folyam, jó indoklás a maximalitásra 5 pont, jó vágás, jó indoklás a minimalitásra szintén 5 pont. Picit hiányos indoklás esetén 1-1 pontot vonjunk le, nagyobb hiány esetén ennél többet (tipikus példa: jó folyam, jó vágás, semmi indoklás - ez max. 6 pont, ha viszont a két érték nem egyezik, akkor ennél jóval kevesebb). Ha valaki a javítóutas algoritmust használja, de hibázik (és ezért nem jön ki megoldás), akkor max. 2-3 pontot kaphat a folyam részre, ha kiderül, hogy hogy keresne minimális vágást, akkor erre is adható max. 2-3 pont. Ha a hibá(k)ról nem derül ki, hogy számolási vagy elvi hiba, akkor szigorúan járjunk el, azaz tekintsük elvinek.