Április 4:

1. feladat: Mennyi lnko(a2+b2,4), ha a és b páratlan?

Megoldás: legyen a=2k+1, b=2l+1, ekkor a2+b2=4\*(k2+k+l2+l)+2, azaz nem osztható 4-el, de páros, így lnko(a2+b2,4)=2.

2. feladat: Melyik az a legkisebb pozitív háromjegyű szám, aminek 5-ször annyi páros osztója van, mint páratlan?

Megoldás: Legyen a keresett szám n=2a\*b alakú, ahol b páratlan. Ekkor a páratlan osztók száma d(b), míg a párosaké a\*d(b), mivel minden páratlan osztóból a db páros nyerhető 2-vel való szorzással. A feladat szerint tehát a=5, azaz n=32\*b. A legkisebb páratlan b, amire 32\*b háromjegyű az 5, azaz n=32\*5=160.

3. feladat: Legyen n pozitív egész. Mennyi ∑(1/di), ahol di az n osztója?

Megoldás: Minden 1/di tag egyértelműen helyettesíthető egy dj/n törttel, ahol dj is az n osztója. Az egyértelműségből következik, hogy minden így minden osztó pontosan egyszer fog szerepelni egy n nevezőjű tört számlálójában, a kérdezett ∑ értéke pedig ∑(dj)/n=(∑dj)/n=σ(n)/n.

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy d(n+1)≥2\*d(n) végtelen sok n-re teljesül.

Megoldás: Legyen n≥3 prím, ekkor 2\*d(n)=2\*2=4,és n+1=2a (mivel páros). Ekkor n+1 osztható 1-el, 2-vel, a-val, 2a-val, azaz d(n+1)≥4 valóban végtelen sok n-re igaz.

5. feladat: Maximum hány szám választható ki 1-től 2n-ig úgy, hogy közülük semelyik kettő sem relatív prím?

Megoldás: A páros számokat kiválasztva kaphatunk n db, a feltételnek megfelelő számot, ugyanakkor ennél több nem érhető el. Ha ugyanis legalább n+1 számot kiválasztunk, akkor lesz köztük legalább 2 szomszédos. Ezek viszont relatív prímek, mert legnagyobb közös osztójuk osztója a különbségük­nek, azaz 1-nek is, így az csak az 1 lehet. A kérdezett maximum tehát n.

6. feladat: Melyek azok a p prímek, amikre p+10 és p+14 is prim?

Megoldás: Ha p 3-as maradéka 1, akkor p+14≥16 osztható 3-al, azaz nem lehet prím. Hasonlóan, ha p 3-as maradéka 2, akkor p+10≥12 osztható 3-al. Így csak az az eset marad, hogy p osztható 3-al. De p prím, azaz p=3. Ekkor p+10=13 és p+14=17 valóban prímek, azaz a megoldás p=3.

7. feladat: Határozzuk meg az összes olyan 1<n≤100 egész számot, amire n osztóinak száma 3-hatvány!

Megoldás: d(n)=∏(1+αi) akkor 3-hatvány, ha minden αi+1 tényező az, azaz ha αi=0 vagy 2 (lehetne elvileg 8, 26 stb is, de már 28=256>100), ami pontosan azt jelenti, hogy n negyedik hatványmentes négyzetszám, azaz 1<n≤100 esetén n=1,4,9,25,36,49,100.

8. feladat: Legyen k<n. Mennyi lnko(n!+k,(n+1)!+k)?

Megoldás: Használjuk az Euklideszi algoritmust.(n+1)!+k=n(n!+k)+n!+(1-n)k. (Indukcióval adódik, hogy (n-1)\*k≤(n-1)2<n!, azaz a maradék pozitív).

n!+k=n!+(1-n)k+nk; n!+(1-n)k=((n-1)!/k-1)\*nk+k; és nk osztható k-val, azaz a legnagyobb közös osztó a legutolsó nemnulla maradék, ami a k.

9. feladat: Bizonyítsuk ne, hogy minden a,b pozitív egészre d(ab)≤d(a)d(b), és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a és b relatív prímek.

Megoldás: Legyen pi a prímszámok sorozata, és k az a legnagyobb egész, amire pk osztója ab-nek. Ekkor a=∏piαi és b=∏piβi (i=1,2,... k) (αi és βi lehet 0 is). Ekkor a bizonyítandó: ∏(αi+βi+1)≤∏(αi+1)(βi+1) (i=1,2...k). Ez viszont tényezőnként igaz, mivel (αi+1)(βi+1)-(αi+βi+1)=αiβi≥0. Egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha minden i-re αiβi=0, azaz ha egy p prím osztja a-, akkor nem osztja b-t és fordítva. Ez pontosan azt jelenti, hogy a és b relatív prím.

Április 11:

10. feladat: Bizonyítsuk be, hogy 3716-1 osztható 5-el.

Megoldás: 3716≡216=(22)8=48≡(-1)8=1 (mod 5), azaz az oszthatóság valóban teljesül.

11. feladat: a100≡5 és a101≡19 (mod 31). Mennyivel kongruens a mod 31?

Megoldás: a101≡5a≡19≡19+31=50 (mod 31) azaz a≡10 (mod 31).

12. feladat: Mennyi 37^(3942) utolsó két jegye? (^ itt hatványozást jelöl).

Megoldás: Az utolsó két jegy az adott szám 100-as maradéka. lnko(37,100)=1 és az Euler-Fermat tétel miatt 37ϕ(100)=3740≡1 (mod 100), azaz a maradék szempontjából a 3942 kitevő 40-esével csökkenthető. 3942≡(-1)42=1 (mod 40), azaz a feladatban kérdezett maradék 371=37.

13. feladat: Oldjuk meg a 6x+1≡10 (mod 15) kongruenciát.

Megoldás: 6x≡9 (mod 15) 2x≡3≡8 (mod 5) azaz x≡4 (mod 5), amiből az eredeti kongruencia megoldásai: x≡4,9,14 (mod 15).

14. feladat: Határozzuk meg az összes olyan m természetes számot és p prímet, amire ϕ(pm)=ϕ(m).

Megoldás: Először tegyük fel, hogy p osztója m-nek. Ekkor ϕ(pm)=pm(1-1/p1)\*...\*(1-1/pk)=pϕ(m)=ϕ(m), ha p=1, de ez nem prím, így ez nem ad megoldást. Most tegyük fel, hogy p nem osztja m-et. Ekkor ϕ(pm)=ϕ(p)ϕ(m)=ϕ(m) ha ϕ(p)=p-1=1, azaz p=2. A keresett számok tehát: p=2, m pedig páratlan szám.

15. feladat: Határozzuk meg 303404 utolsó két számjegyét.

Megoldás: 303404≡3404=(340)10\*34≡34=81 (mod 100) (340≡1 (mod 100) az Euler-Fermat- tételből következik).

16. feladat: Relatív prím-e 2100-1 és 3100-1?

Megoldás: 2100=450≡(-1)50=1 (mod 5), és 3100=950≡(-1)50=1 (mod 5), azaz 5 osztja mindkét számot, így azok nem lehetnek relatív prímek.

17.feladat: legyen lnko(a,2001)=1. Bizonyítsuk be, hogy (a28-1)(a24-a22-a2+1) osztható 2001-el.

Megoldás: (a28-1)(a24-a22-a2+1)=(a28-1)(a22-1)(a2-1). a28-1 osztható 29-el, a22-1 osztható 23-al és a2-1 osztható 3-al a kis Fermat-tétel miatt. Ezért a szorzat osztható 29\*23\*3=2001-el.