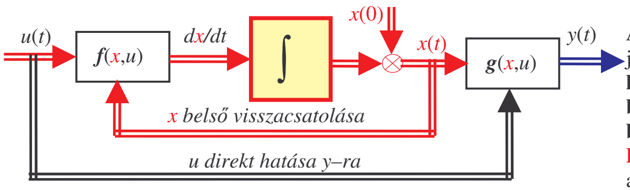
1.) a.) Adja meg a **nemlineáris** dinamikus **MIMO** rendszer matematikai modelljét az **állapotegyenlet–reprezentáció** alakjában! b.) Az állapotegyenlet kifejezésének megfelelően jellemezze a dinamikus rendszert az $\boldsymbol{x}(t)$ állapotvektort is tartalmazó **hatásvázlatával**, és értelmezze a hatásvázlaton szereplő **algebrai** és **dinamikus** tagok jelátviteli tulajdonságait!

Megoldás

a.) $dx(t)/dt=\boldsymbol{f}[x(t), u(t)]$ $y(t)=\boldsymbol{g}[x(t), u(t)]$, $x(t)$:állapotvektor, $u(t)$:gerjesztés (**be**menőjel) vektor, $y(t)$: válasz (**ki**menőjel) vektor

b.)



Algebrai tagok: $\boldsymbol{f}(x,u)$ *és* $\boldsymbol{g}(x,u)$ függvényekkel jellemzett ***nemlineáris*** tagok, és az *összegző* tag. Ezek **ki**menőjelei *algebrai* függvénykapcsolatban vannak a **be**menőjeleikkel, illetve az összegző tag **ki**menőjele a **be**menőjelek összege.
Dinamikus tag: a hatásvázlat ***lineáris*** integráló tagja, amelynek $x(t)$ **ki**menőjele a $dx(t)/dt$ **be**menőjelének időszerinti integrálja: $\int[dx(t)/dt]dt=x(t)$.

2.) a.) Egy $j>1$ számú **be**menetű, $k>1$ számú **ki**menetű, ***n–edrendű***, **stabilis**, **lineáris** dinamikus **MIMO** rendszer állapotegyenlet reprezentációja $dx(t)/dt=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)$, $y(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}u(t)$. A rendszer a $t=0$ időpontban $x(0)=\boldsymbol{0}$ állapotvektor (kezdeti feltétel), $u(t)=\boldsymbol{0}$ gerjesztés vektor és $y(0)=\boldsymbol{0}$ kimenőjel vektor adatok mellett az állapotér origójában egyensúlyi (nyugalmi) helyzetében van. Ebben a nyugalmi állapotában az $u(t)$ **be**menőjel vektor $u_0(t)=[u_{10}\,u_{20}\ldots u_{j0}]^T=$*állandó* értékre változik, vagyis a **be**menőjel vektor minden $u_i(t)$ komponense $u_{i0}\boldsymbol{1}(t)=$*állandó* értékre „ugrik". Az $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ paramétermátrixok ismeretében mekkora lesz az adott $u_0(t)$ gerjesztés hatására keletkező $x(\infty)=x_0=[x_{10}\,x_{20}\ldots x_{n0}]^T$ **állapot**vektor és az $y(\infty)=y_0=[y_{10}\,y_{20}\ldots y_{k0}]^T$ **ki**menőjel vektor **új egyensúlyi** értéke? b.) Mi az állapotegyenletével leírt **lineáris** dinamikus **MIMO** rendszer **stabilitásának** a feltétele?

Megoldás

a.) A **stabilitás,** és u_0=állandó okán van állandósult állapot, amikor is ebben az állapotban az állapotsebesség $dx_0(t)/dt=\boldsymbol{A}x_0+\boldsymbol{B}u_0=\boldsymbol{0}$. Ebből az x_0 állapotvektor u_0 **be**menőjel hatására keltett egyensúlyi értéke $x_0=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u_0$. Az y_0 kimenőjel ennek ismeretében $y_0=\boldsymbol{C}x_0+\boldsymbol{D}u_0=(-\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})u_0$.
b.) A stabilitási feltétele: Az $\boldsymbol{A}$ **állapot**mátrix $K(\lambda)=(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ karakterisztikus polinomja *Hurwitz* polinom legyen. Vagy más megfogalmazásban: a rendszer $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának minden λ_i sajátértékének valós része negatív legyen [$real(\lambda_i)<0$].

3.) Mi indokolja lineáris rendszerek analízisének módszertanában a *Laplace* integrál–transzformáció alkalmazását? b.) Mi a *Laplace* transzformáció **linearitási** tétele és a **differenciálási** szabálya?

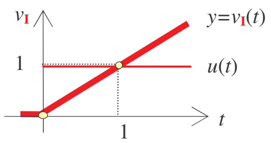
Megoldás

a.) A *Laplace* transzformáció alkalmazása a **lineáris** dinamikus rendszerek $\boldsymbol{t}$ időtartományban **differenciálegyenlet** alakban megadott matematikai modelljét az $\boldsymbol{s}$ *Laplace* operátor tartományban **algebrai egyenletre** egyszerűsíti, így ennek megoldása is algebrai műveletre egyszerűsödik. **b**.) Linearitási tétel: $L\{\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)\}=\boldsymbol{A}x(s)+\boldsymbol{B}u(s)$, $L^{-1}\{\boldsymbol{A}x(s)+\boldsymbol{B}u(s)\}=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)$, differenciálási szabály: $L\{\boldsymbol{d}x(t)/\boldsymbol{dt}\}=\boldsymbol{s}x(s)-x(0)$.

4.) a.) Adja meg a **P**, **I**, és **H** lineáris **alap**tagok $W(s)$ **átviteli**–, és $v(t)$ **átmeneti** függvényeit! b.) Az **integráló** alaptag **be**menőjele $u(t)=\boldsymbol{1}(t)$, **ki**menőjelének kezdeti értéke $y(0)=0$. **Számítsa** ki, és léptékhelyesen **ábrázolja** az **I alap**tag $y(t)$ **ki**menőjelét!

Megoldás

a.) **P** alaptag: $\boldsymbol{W_P}(s)=k$, $v_P(t)=k\boldsymbol{1}(t)$ és $k=$*állandó*, **I** alaptag: $\boldsymbol{W_I}(s)=1/s$, $v_I(t)=t$, **H** alaptag: $\boldsymbol{W_H}(s)=exp(-sT_h)$, $v_H(t)=\boldsymbol{1}(t-T_h)$.
b.) $\boldsymbol{W_I}(s)=1/s$, $u(s)=L\{\boldsymbol{1}(t)\}=1/s$, $y(s)=\boldsymbol{W_I}(s)u(s)=(1/s)(1/s)=1/s^2$. $y(t)=v_I(t)=L^{-1}\{1/s^2\}=t$. Vagy $y(t)=v_I(t)=\int u(t)dt=\int\boldsymbol{1}(t)dt=\int dt=t$.

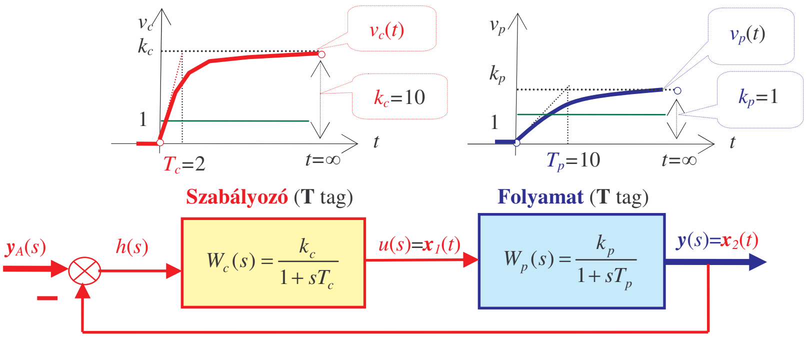


5.) a.) Mit értünk a lineáris tagok **alap**struktúrái alatt? b.) Egy $W_1(s)=G_1(s)/H_1(s)$ átviteli függvényű tag a $W_2(s)=G_2(s)/H_2(s)$ átviteli függvényű taggal **negatívan visszacsatolt** struktúrát alkot. Határozza meg az adott struktúra $\boldsymbol{W}_R(s)$ **eredő átviteli** függvényét és az eredő, visszacsatolt rendszer **karakterisztikus polinomját**!

Megoldás

a.) **Alap**struktúrák: tagok **soros–** és **párhuzamos** kapcsolásai, valamint $\boldsymbol{W}_1(s)$ átviteli függvényű tag pozitív vagy negatív **visszacsatolása** a $\boldsymbol{W}_2(s)$ átviteli függvényű taggal.
b.)A $\boldsymbol{W}_1(s)=G_1(s)/H_1(s)$ átviteli függvényű tag **negatív** visszacsatolása a $\boldsymbol{W}_2(s)=G_2(s)/H_2(s)$ átviteli függvényű taggal: $\boldsymbol{W}_R(s)=\boldsymbol{W}_1(s)/[1+\boldsymbol{W}_1(s)\boldsymbol{W}_2(s)]=[G_1(s)/H_1(s)]/[1+G_1(s)G_2(s)/H_1(s)H_2(s)]=[G_1(s)H_2(s)]/[H_1(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)]=G_R(s)/H_R(s)$. Az eredő visszacsatolt rendszer karakterisztikus polinomja $K(s)=H_R(s)=H_1(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)$.

6.) Adott az alábbi hatásvázlatával jellemzett, valamint az alrendszerek (a szabályozó és a folyamat) $\boldsymbol{W}_c(s)$, $\boldsymbol{W}_p(s)$ **átviteli**–, és $v_c(t)$, $v_p(t)$ **átmeneti** függvényeivel leírt lineáris **szabályozási** rendszer:



$$W_c(s)=\frac{G_c(s)}{H_c(s)}=\frac{k_c}{1+sT_c}=\frac{10}{1+2s} \qquad W_p(s)=\frac{G_p(s)}{H_p(s)}=\frac{k_p}{1+sT_p}=\frac{1}{1+10s}$$

$$k_c=10,\quad T_c=2 \qquad k_p=1,\quad T_p=10 \qquad k=k_c k_p=10$$

a.) Adja meg a **szabályozó** és a **folyamat** elsőrendű, lineáris **differenciálegyenletét**, valamint a **P**, **I** és **Σ** lineáris **alap**tagokból felépített **hatásvázlatát**!

b.) A szabályozó és a folyamat **alap**tagokból felépített hatásvázlata alapján készítse el a **zárt szabályozási rendszer P**, **I** és **Σ** lineáris **alap**tagokat tartalmazó **hatásvázlatát**!

c.) A szabályozó $u(t)$ **ki**menőjelét $\boldsymbol{x_1}(t)$ állapotváltozónak, illetve a folyamat $y(t)$ **ki**menőjelét $\boldsymbol{x_2}(t)$ *állapotváltozónak* felvéve írja fel a lineáris, másodrendű**,** zárthurkú, negatívan visszacsatolt szabályozási rendszer **állapotegyenlet– reprezentációját**, ha **be**menőjel az $y_A(t)$ referencia jel, **ki**menőjel az $y(t)=\boldsymbol{x_2}(t)$ szabályozott jellemző (**SISO** tag).

d.) Indokolja meg a zárt rendszer aszimptotikusan **stabilis** tulajdonságát, valamint azt a tényt, hogy a stabilitás bármekkora $k=k_c k_p>0$ erősítési tényező esetére fennáll (*strukturális stabilitás*).

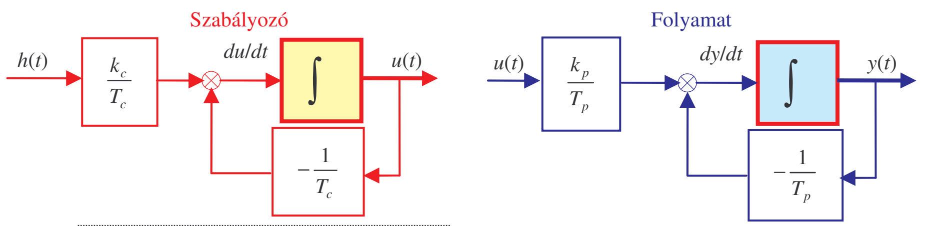
e.) Készítsen egy olyan **MATLAB** programot (dok.m fájlt), amely futásának első lépéseként töröl minden változót, és törli az ábrákat megjelenítő képernyőt, majd ezt követően bekéri a szabályozó és a folyamat k_c, T_c, k_p, T_p adatait, ezek alapján meghatározza a zárt hatásláncú szabályozási rendszer $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, paramétermátrixait, az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrix λ_1, λ_2 sajátértékeit, valamint a képernyőn megjeleníti a zárt rendszer $y(t)=\boldsymbol{v}_R(t)$ eredő átmeneti függvényét (az $y_A(t)=\mathbf{1}(t)$ bemenőjelre adott $\boldsymbol{y}(t)=v_R(t)$ választ).

Megoldás

a.) A **szabályozó** és a **folyamat** adott, $W_c(s)$ és $W_p(s)$ **átviteli** függvényeinek ismeretében:

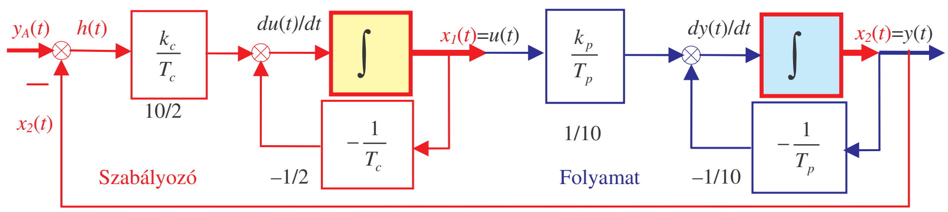
$$W_c(s)=\frac{k_c}{1+sT_c}=\frac{u(s)}{h(s)} \;\rightarrow\; (sT_c+1)u(s)=k_c h(s) \;\rightarrow\; T_c\frac{du(t)}{dt}+u(t)=k_c h(t) \;\rightarrow\; 2\frac{du(t)}{dt}+u(t)=10h(t)$$

$$W_p(s)=\frac{k_p}{1+sT_p}=\frac{y(s)}{u(s)} \;\rightarrow\; (sT_p+1)y(s)=k_p u(s) \;\rightarrow\; T_p\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k_p u(t) \;\rightarrow\; 10\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$



$$W_c(s)=\frac{k_c}{T_c}\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{sT_c}}=\frac{k_c}{1+sT_c}=\frac{10}{1+2s} \qquad W_p(s)=\frac{k_p}{T_p}\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{sT_p}}=\frac{k_p}{1+sT_p}=\frac{1}{1+10s}$$

b.) A szabályozó, a folyamat hatásvázlatai alapján a szabályozási **rendszer hatásvázlata**:



Állapotváltozók az integráló tagok $x_1(t)=u(t)$ és $x_2(t)=y(t)$ **ki**menőjelei, a rendszer bemenőjele az $y_A(t)$ referenciajel, **ki**menőjele az $y(t)=x_2(t)$ szabályozott jellemző (másodrendű **SISO** rendszer).

c.) A zárt rendszer hatásvázlatának jelölései mellett a másodrendű **SISO** rendszer **állapotegyenlet–reprezentációja**:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{T_c}x_1(t) + \frac{k_c}{T_c}[y_A(t) - x_2(t)] = -\frac{1}{T_c}x_1(t) - \frac{k_c}{T_c}x_2(t) + \frac{k_c}{T_c}y_A(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) - \frac{10}{2}x_2(t) + \frac{10}{2}y_A(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_p}x_2(t) + \frac{k_p}{T_p}x_1(t) = \frac{k_p}{T_p}x_1(t) - \frac{1}{T_p}x_2(t) = \frac{1}{10}x_1(t) - \frac{1}{10}x_2(t)$$

$$y(t) = x_2(t)$$

****

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_c} & -\frac{k_c}{T_c} \\ \frac{k_p}{T_p} & -\frac{1}{T_p} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_c}{T_c} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} y_A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{10}{2} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{2} \\ 0 \end{bmatrix} y_A(t) =$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} y_A(t)$$

d.)
A zárt szabályozási rendszer ***A*** **állapot**mátrixa és ennek $K(\lambda)$ **karakterisztikus** polinomja:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_c} & -\frac{k_c}{T_c} \\ \frac{k_p}{T_p} & -\frac{1}{T_p} \end{bmatrix} \rightarrow \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{T_c} & \frac{k_c}{T_c} \\ -\frac{k_p}{T_p} & \lambda + \frac{1}{T_p} \end{bmatrix} = (\lambda + \frac{1}{T_c})(\lambda + \frac{1}{T_p}) + \frac{k_c k_p}{T_c T_p} = \lambda^2 + (\frac{1}{T_c} + \frac{1}{T_p})\lambda + \frac{1}{T_c T_p} + \frac{k_c k_p}{T_c T_p}$$

$$K(\lambda) = T_c T_p \lambda^2 + (T_c + T_p)\lambda + 1 + k = 20\lambda^2 + 12\lambda + 11$$

Ez a másodfokú polinom T_c=2>0, T_p=10>0 és $k=k_c k_p$=(10)(1)=10>0 értékek mellett *Hurwitz* polinom, tehát mindkét gyöke negatív, vagy negatív valós részű, ezért a rendszer **strukturálisan** (a $k=k_c k_p$ tényező **bármekkora** k>0 értéke mellett) **stabilis** (*strukturális* stabilitás).

e.)%dok
```
echo on;clear;clf;
kc=input('kc=');Tc=input('Tc=');Gc=kc;Hc=[Tc 1];
kp=input('kp=');Tp=input('Tp=');Gp=kp;Hp=[Tp 1];
A=[-1/Tc -kc/Tc;kp/Tp -1/Tp];B=[kc/Tc;0];C=[0 1];D=0;
lambda=eig(A);disp(lambda);pause;
step(A,B,C,D);pause;
disp('vége');
```

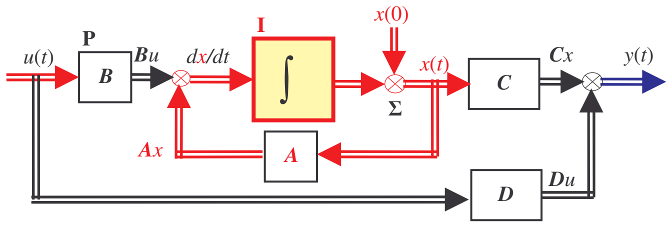
II. Vizsga

1.) a.) Adja meg a **lineáris** dinamikus **MIMO** rendszer matematikai modelljét az **állapotegyenlet reprezentáció** alakjában! b.) Az állapotegyenlet kifejezésének megfelelően jellemezze a dinamikus rendszert az $\boldsymbol{x}(t)$ állapotvektort is tartalmazó **hatásvázlatával**, és értelmezze a hatásvázlaton szereplő lineáris **algebrai** és **dinamikus** tagok jelátviteli tulajdonságait!

Megoldás

a.) $dx(t)/dt=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)$ $\quad y(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}u(t)$. $x(t)$:állapotvektor, $u(t)$:gerjesztés (bemenőjel) vektor, $y(t)$ válasz (kimenőjel) vektor.

b.)



Algebrai tagok: az $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ paramétermátrixokkal jellemzett **P** (arányos) tagok és a **Σ** összegző tagok Ezek **ki**menőjelei a **be**menőjeleikkel **arányosak**, illetve az *összegző* tagok **ki**menőjelei a **be**menőjeleik **összege**.

Dinamikus I tag: a hatásvázlat **integráló** tagja, amelynek $x(t)$ **ki**menőjele a $dx(t)/dt$ **be**menőjelének időszerinti **integrálja**.

2.) a.) A j>1 számú **be**menetű, k>1 számú **ki**menetű, $\boldsymbol{n}$*–edrendű*, **lineáris** dinamikus **MIMO** rendszer állapotegyenlet reprezentációja $dx(t)/dt=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)$, $y(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{D}u(t)$. Mi az **állapotegyenletével** leírt lineáris dinamikus rendszer **stabilitásának** a feltétele? b.) Milyen **módszerek** vannak az állapotegyenlet adott $x(0)$ kezdeti feltételre és $u(t)$ gerjesztés vektorra vonatkozó $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ megoldásának?

Megoldás

a.) A stabilitás feltétele: a rendszer $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának $K(\lambda)=det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ karakterisztikus polinomja ***Hurwitz*** polinom legyen. Az $\boldsymbol{n}$ fokszámú *Hurwitz* polinom minden p_i **gyöke** negatív valós részű. Más megfogalmazásban: stabilis a lineáris dinamikus rendszer, ha az $\boldsymbol{A}$ állapotmátrixának minden λ_i sajátértéke negatív valós részű [$real(\lambda_i)<0$].

b.) Az állapotegyenlet **analitikus** (lásd megoldó képlet)–, vagy **numerikus** (lásd *Euler*, *Runge–Kutta*, stb. módszerek) megoldása, a *Laplace* **integrál–transzformáció** alkalmazása, a **MATLAB** `[y,x]=`**`lsim`**`(A,B,C,D,u,t,x0)` függvényének használata.

3.) a.) Mi indokolja lineáris rendszerek analízisének módszertanában a *Laplace* **integrál–transzformáció** alkalmazását? b.) Adja meg a $\boldsymbol{W}(s)$ átviteli függvény definícióját valamint az $u(t)=\boldsymbol{\delta}(t)$, az $u(t)=\boldsymbol{1}(t)$ és az $u(t)=e^{at}$ belépő időfüggvények $L\{\boldsymbol{\delta}(t)\}$, $L\{\boldsymbol{1}(t)\}$ és az $L\{e^{at}\}$ *Laplace* transzformáltjait!

Megoldás

a.) A lineáris rendszer matematikai modellje a $\boldsymbol{t}$ időtartományban az **állapotegyenlet–reprezentáció**, vagy **SISO** tag esetében a **rendszeregyenlet**. A *Laplace* transzformáció alkalmazásával az **állapotegyenlet–reprezentáció** (differenciálegyenlet–rendszer) illetve a **rendszeregyenlet** (n–edrendű, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet) az s operátor tartományában **algebrai** egyenletrendszerként, vagy egyenletként jelenik meg, ami a megoldás meghatározását is **algebrai** problémára egyszerűsíti.

b.) $\boldsymbol{W}(s)=y(s)/u(s)$, a **SISO** tag $y(t)$ **ki**menőjel $y(s)=L\{y(t)\}$ *transzformáltjának* és az $u(t)$ **be**menőjel $u(s)=L\{u(t)\}$ *transzformáltjának* **hányadosa zérus** kezdeti feltételek mellett. Vagy $\boldsymbol{W}(s)=L\{w(t)\}$: a **SISO** tag **átviteli** függvénye a tag $w(t)$ **súlyfüggvényének** *Laplace* transzformáltja.

$L\{\boldsymbol{\delta}(t)\}=1$, $L\{\boldsymbol{1}(t)\}=1/s$, és $L\{e^{at}\}=1/(s-a)$.

4.) a.) Írja fel $\boldsymbol{W}(s)$ átviteli függvény **polinomiális**–, **zérus–pólus** alakú–, és **részlettörtes** kifejezéseit! b.) Egy lineáris tag átviteli függvénye $\boldsymbol{W}(s)=[3(1+2s)]/[s^2+4s+1]$. Írja fel a tag differenciálegyenletét! **Stabilis–e** az adott átviteli függvénnyel leírt lineáris dinamikus rendszer?

a.)

$$W(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{g_0s^m+g_1s^{m-1}+\cdots+g_{m-1}s+g_m}{s^n+h_1s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n}=g_0\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{s-p_i}$$

A polinomiális alak g_i, h_i együtthatói valós számok, a zérus–pólus alakban a z_i zérusok a $G(s)$ polinom gyökei és $W(z_i)=0$, a p_i pólusok a $H(s)$ polinom gyökei és $W(p_i)=\infty$. Az itt felírt részlettörtes alak akkor létezik, ha $W(s)$ minden p_i pólusa (a $H(s)$ polinom minden p_i gyöke) egymástól különböző. Az r_i értékek a p_i pólushoz tartozó reziduumok.

b.)

$$W(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{y(s)}{u(s)}\to H(s)y(s)=G(s)u(s)\to\qquad(s^2+4s+1)y(s)=(6s+3)u(s)\quad\to\quad\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=6\frac{du(t)}{dt}+3u(t)$$

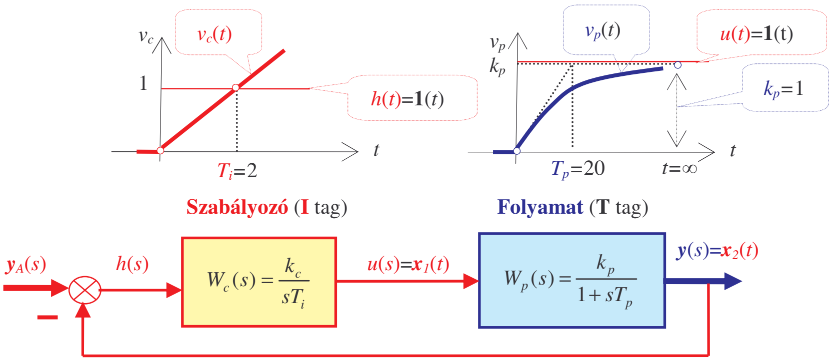
A rendszer stabilis, mert a $H(s)=s^2+4s+1$ másodfokú karakterisztikus polinom *Hurwitz* polinom. Ennek jelentése szerint $\boldsymbol{W}(s)$ mindkét $p_{1,2}$ pólusa **negatív valós részű**.

5.) a.) Mit értünk a lineáris dinamikus rendszer **sajátmozgása** és **gerjesztett** mozgása alatt? b.) Mi a jelentősége a szuperpozíció elvének a lineáris rendszerek analízisében?

a.) **Sajátmozgás**: Az állapotvektor $x(0)\neq\boldsymbol{0}$ kezdeti feltétel vektor által keltett $x_s(t)$ mozgása $u(t)=\boldsymbol{0}$ gerjesztés vektor mellett. **Gerjesztett mozgás**: Az állapotvektor $u(t)\neq\boldsymbol{0}$ gerjesztés vektor keltette $x_g(t)$ mozgása $x(0)=\boldsymbol{0}$ kezdeti feltétel vektor mellett.

b.) **Lineáris** rendszerek esetében, ha a rendszer $u_a(t)$ gerjesztés vektorra $x_a(t)$, $y_a(t)$ válaszokat–, az $u_b(t)$ gerjesztés vektorra $x_b(t)$, $y_b(t)$ válaszokat ad, akkor az $u(t)=k_au_a(t)+k_bu_b(t)$ gerjesztés hatására keltett válaszok $x(t)=k_ax_a(t)+k_bx_b(t)$, $y(t)=k_ay_a(t)+k_by_b(t)$ (k_a, k_b *állandók*). Ez az elv a lineáris rendszerek analízisét jelentősen egyszerűsíti, mivel az egyes jelkomponensek hatását a válaszokra külön–külön lehet meghatározni, és ha a rendszert a hatások együttese éri, akkor az eredő hatás az egyes hatások összegeként állítható elő. A szuperpozíció tételéből következik az a tulajdonság, hogy abban az esetben, amikor az $u(t)$ **be**menőjel *impulzusok*, *ugrásfüggvények*, vagy *harmonikus jelek* **összegeként** előállíthatók, akkor az egyes komponensekre adott válaszokból az eredeti $u(t)$ jelre adott $y(t)$ válasz is meghatározható. Egy dinamikus rendszer akkor lineáris, ha érvényes rá a szuperpozíció elve.

6.) Adott az alábbi hatásvázlatával jellemzett, valamint az alrendszerek (a szabályozó és a folyamat) $\boldsymbol{W}_c(s)$, $\boldsymbol{W}_p(s)$ **átviteli**–, és $v_c(t)$, $v_p(t)$ **átmeneti** függvényeivel leírt lineáris **szabályozási** rendszer:



$$W_c(s)=\frac{G_c(s)}{H_c(s)}=\frac{1}{sT_i}=\frac{1}{2s} \qquad W_p(s)=\frac{G_p(s)}{H_p(s)}=\frac{k_p}{1+sT_p}=\frac{1}{1+20s}$$

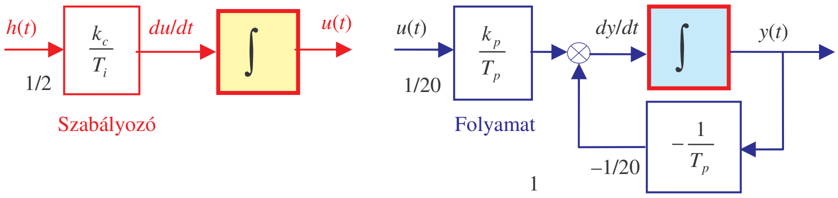
$$k_c=1 \quad T_i=2 \qquad\qquad k_p=1 \quad T_p=20$$

a.) Adja meg a **szabályozó** és a **folyamat** elsőrendű, lineáris **differenciálegyenletét**, valamint a **P**, **I**, és **Σ** lineáris **alap**tagokból felépített **hatásvázlatait**!
b.) A szabályozó és a folyamat **alap**tagokból felépített hatásvázlata alapján készítse el a **zárt szabályozási rendszer P**, **I**, és **Σ** lineáris **alap**tagokat tartalmazó **hatásvázlatát**!
c.) A szabályozó $u(t)$ **ki**menőjelét $\boldsymbol{x_1}(t)$ állapotváltozónak, illetve a folyamat $y(t)$ **ki**menőjelét $\boldsymbol{x_2}(t)$ állapotváltozónak felvéve írja fel a lineáris, zárthurkú, negatívan visszacsatolt szabályozási rendszer **állapotegyenlet–reprezentációját**, ha **be**menőjel az $\boldsymbol{y_A}(t)$ referencia jel, **ki**menőjel az $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x_2}(t)$ szabályozott jellemző (**SISO** rendszer).
d.) Adja meg a **zárt** szabályozási rendszer $\boldsymbol{W_R}(s)=G_R(s)/H_R(s)=\boldsymbol{y}(s)/\boldsymbol{y_A}(s)$ eredő **átviteli** függvényét és ennek alapján indokolja meg a zárthurkú szabályozási rendszer aszimptotikusan **stabilis** tulajdonságát!
e.) Készítsen egy olyan **MATLAB** programot (dok.m fájlt), amely futásának első lépéseként töröl minden változót, és törli az ábrákat megjelenítő képernyőt, majd ezt követően bekéri a szabályozó és a folyamat k_c, T_i, k_p, T_p adatait, ezek alapján meghatározza a nyitott kör $\boldsymbol{W_0}(s)=\boldsymbol{W_c}(s)\boldsymbol{W_p}(s)=G_0(s)/H_0(s)$–, és a zárt kör $\boldsymbol{W_R}(s)=\boldsymbol{W_0}(s)/[1+\boldsymbol{W_0}(s)]=G_R(s)/H_R(s)$ átviteli függvényeit, a zárt rendszer $H_R(s)$ karakterisztikus polinomjának p_{R1}, p_{R2} gyökeit, valamint a képernyőn megjeleníti a zárt rendszer $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{v_R}(t)$ **átmeneti** függvényét (az $\boldsymbol{y_A}(t)=\mathbf{1}(t)$ bemenőjelre adott $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{v_R}(t)$ választ).

Megoldás
a.)

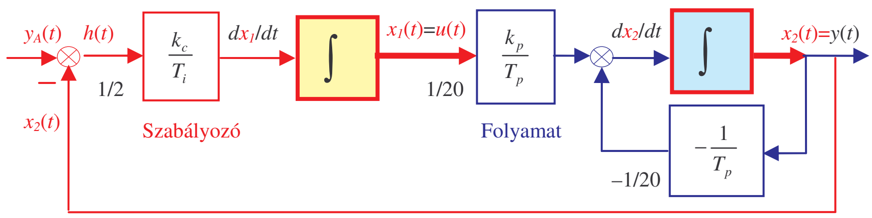
$$W_c(s)=\frac{u(s)}{h(s)}\to sT_iu(s)=k_ch(s) \quad \to T_i\frac{du(t)}{dt}=k_ch(t) \quad \to \frac{du(t)}{dt}=\frac{k_c}{T_i}h(t) \quad \to \frac{du(t)}{dt}=\frac{1}{2}h(t)$$

$$W_p(s)=\frac{y(s)}{u(s)}\to (sT_p+1)y(s)=k_pu(s) \to T_p\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k_pu(t)\to \frac{dy(t)}{dt}=-\frac{1}{T_p}y(t)+\frac{k_p}{T_p}u(t) \quad \to \frac{dy(t)}{dt}=-\frac{1}{20}y(t)+\frac{1}{20}u(t)$$



$$W_c(s)=\frac{k_c}{T_i}\frac{1}{s}=\frac{k_c}{sT_i}=\frac{1}{2s} \qquad W_p(s)=\frac{k_p}{T_p}\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{sT_p}}=\frac{k_p}{1+sT_p}=\frac{1}{1+20s}$$

b.) A szabályozó és a folyamat hatásvázlatai alapján a zárt szabályozási rendszer **alap**tagokból kialakított hatásvázlata:



c.) A zárt szabályozási rendszer alaptagokból felépített hatásvázlatának alapján – az integráló tagok **ki**menőjeleinek $x_1(t)=u(t)$, $x_2(t)=y(t)$ jelölései mellett – a zárt rendszer **állapotegyenlet–reprezentációs** alakú matematikai modellje:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=\frac{k_c}{T_i}[y_A(t)-x_2(t)]=-\frac{k_c}{T_i}x_2(t)+\frac{k_c}{T_i}y_A(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-\frac{1}{T_p}x_2(t)+\frac{k_p}{T_p}x_1(t)=\frac{k_p}{T_p}x_1(t)-\frac{1}{T_p}x_2(t)\quad\rightarrow$$
$$y(t)=x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\frac{k_c}{T_i}\\ \frac{k_p}{T_p} & -\frac{1}{T_p}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{k_c}{T_i}\\0\end{bmatrix}}_{B}y_A(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\frac{k_c}{T_i}\\ \frac{k_p}{T_p} & -\frac{1}{T_p}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{k_c}{T_i}\\0\end{bmatrix}}_{B}y_A(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{20}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}}_{B}y_A(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{[0]}_{D}\,y_A(t)$$

d.) A **nyitott–,** és a **zárt** kör $\boldsymbol{W_0(s)}$ és $\boldsymbol{W_R(s)}$ **eredő** átviteli függvényei, a **zárt** rendszer **karakterisztikus** polinomja, illetve a zárt rendszer stabilitását megszabó, másodfokú karakterisztikus polinomjának a $p_{R1,2}$ **gyökei**:

$$W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=\frac{k_c}{sT_i}\frac{k_p}{1+sT_p}=\frac{k_ck_p}{T_i}\frac{1}{s(1+sT_p)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s(1+20s)}$$

$$W_R(s)=\frac{W_0(s)}{1+W_0(s)}=\frac{G_R(s)}{H_R(s)}=\frac{\frac{k_ck_p}{T_i}\frac{1}{s(1+sT_p)}}{1+\frac{k_ck_p}{T_i}\frac{1}{s(1+sT_p)}}=\frac{k}{sT_i(1+sT_p)+k}=\frac{1}{T_iT_ps^2+T_is+k}=\frac{1}{40s^2+2s+1}$$

Miután a $H_R(s)=40s^2+2s+1=0$ karakterisztikus egyenlet mindkét $p_{R1,2}=-0.025\pm j0.1562$ gyöke **negatív valós részű**, ezért a rendszer aszimptotikusan **stabilis**.

e.)

```
%dok
echo on;clear;clf;
kc=input('kc=');Ti=input('Ti=');Gc=kc;Hc=[Ti 0];
kp=input('kp=');Tp=input('Tp=');Gp=kp;Hp=[Tp 1];
[G0,H0]=series(Gc,Hc,Gp,Hp);
[GR,HR]=cloop(G0,H0);printsys(GR,HR,'s');pause;
pR=roots(HR);disp(pR);pause;
step(GR,HR);pause;
disp('vége');
```