A2 Matematika vizsgazárthelyi 2006.05.31.

1. [15p] Legyen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ az origó körüli pozitív irányú derékszögű elforgatás operátora. Adjuk meg T mátrixát a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázisban, ahol $\mathbf{b}_1 = (1,3)$, $\mathbf{b}_2 = (-1,-2)$.

2. [15p] Mutassuk meg, hogy bármely véges $[a,b]$, $a \geq 0$ szakaszra

$$\sum_1^\infty \int_a^b x^n e^{-nx} dx = \int_a^b \frac{x}{e^x - x} dx.$$

3. [15p] a. Keressük meg a konvergenciatartományt:

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_1^\infty (x/n)^n$$

b. Adjuk meg $(1-x)^{-2}$ $x_0 = 0$ körüli hatványsorát az $(1-x)^{-1}$ sorából vagy más módon.

4. [15p] Fejtsük Fourier-sorba az $f(x) = \cos(x/2)$, $|x| \leq \pi$ 2π-periodikus függvényt. Előállítja-e a Fourier-sor $f(x)$-et?

5. [15p] Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Folytonos-e f az origóban?
b. Számítsuk ki az f'_x, f'_y parciális deriváltfüggvényeket.
c. Totálisan differenciálható-e f az origóban?

6. [15p] Keressük meg az $x^4 + y^4 + 4xy$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

7 [15p] a. Adjuk meg a $z = 0$, $z = x + y$ és $x^2 + y^2 = x + y$ felületek által határolt test térfogatát.
b.

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy\, dx\, dz = ?$$

1] $\begin{array}{cccc} \left[\begin{matrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{matrix}\right] \\ b_1 \quad b_2 \quad Tb_1 \quad Tb_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & -7 \end{matrix}\right] \rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 10 & -7 \end{matrix}\right]$, $\underline{\underline{T}}_B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$

$(T(x,y) = (-y,x)$ miatt$)$

2] $(x^n e^{-nx})' = nx^{n-1}e^{-nx} - nx^n e^{-nx} = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x)$. Ezért $0 \le x^n e^{-nx} \underset{\substack{\uparrow \\ x=1}}{\le} 1^n e^{-n\cdot 1} = e^{-n}$

Mivel $\sum e^{-n} < \infty$, a Weierstrass-krit szerint $\sum f_n \rightrightarrows S$ $[0,\infty)$-en, így $[a,b]$-n is $\Rightarrow \sum_1^\infty \int_a^b \frac{x^n}{e^{nx}}dx = \int_a^b \sum_1^\infty \frac{x^n}{e^{nx}}dx = \int_a^b \frac{x}{e^x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{e^x}}dx = \int_a^b \frac{x}{e^x - x}dx$

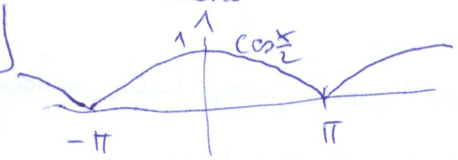
3] a) $\sum \frac{x^n}{\sqrt n}$ esetén $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt n}}} = 1$, $x=1$-re $\sum \frac{1}{\sqrt n} \ge \sum \frac1n = \infty$, $x=-1$-re $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$ Leibniz, ezért konv $\Rightarrow KT = [-1,1)$

$\sum \left(\frac{x}{n}\right)^n$ esetén $R = \frac{1}{\lim \frac1n} = \infty$, $KT = \mathbb{R}$

b) $\frac{1}{(1-x)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hatv}}}{=} \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}(1+x+x^2+\dots) \underset{\uparrow}{=} 1+2x+3x^2+\dots = \sum_1^\infty nx^{n-1}$, $|x|<1$

hatványsor tagonként deriválható

[binomiális sorral is lehet]

4] 

$f(x)$ páros $\Rightarrow b_n = 0$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac x2 \, dx = \frac4\pi\left[\sin\frac x2\right]_0^\pi = \frac4\pi$,

$a_n = \frac2\pi\int_0^\pi \cos\frac x2 \cos nx\,dx = \frac1\pi\int_0^\pi\left(\cos\left(n+\tfrac12\right)x + \cos\left(n-\tfrac12\right)x\right)dx =$

$= \frac1\pi\left[\frac{\sin(n+\frac12)\pi}{n+\frac12} + \frac{\sin(n-\frac12)\pi}{n-\frac12}\right] = \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{n+\frac12} - \frac{1}{n-\frac12}\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{1}{n^2-\frac14}$

$f(x) \sim \frac2\pi + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2-\frac14} = \frac2\pi + \frac1\pi\left(\frac{\cos x}{1-\frac14} - \frac{\cos 2x}{4-\frac14} + \frac{\cos 3x}{9-\frac14} - \dots\right)$

A F-sor előállítja f-et, mert f folytonos és vannak féloldali deriváltjai

5] a) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to0+} r(\underbrace{\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi}_{\text{korlátos}}) = 0 = f(0,0)$, f folytonos

b) $f'_x = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x(x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = 1$

$f'_y = \frac{-2xy(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$

c) $\varepsilon(x,y) = f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y = \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} - x = \frac{-2xy^2}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} \frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim\limits_{r\to0+}(-2\cos\varphi\sin^2\varphi)$ nem létezik $\Rightarrow f$ nem diffható $(0,0)$-ban

[f'_x és f'_y nem folytonosak $(0,0)$-ban, de ebből még nem következik, hogy f nem diffható.]

6] $0 = f'_x = 4x^3 + 4y$ | $y = -x^3,\ x = -y^3,\ x = -(-x^3)^3 = x^9 \Rightarrow$ $x=0,\ y=0$
$0 = f'_y = 4y^3 + 4x$ | $x=1,\ y=-1$
$x=-1,\ y=1$

$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{bmatrix}$ $(0,0)$-nál $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\det < 0 \Rightarrow$ nincs lok szélsőérték

$(1,-1)$-nél és $(-1,1)$-nél $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ $\det > 0,\ a_{11} > 0 \Rightarrow$ lok. minimum van

7] a) $|V| = \iint\limits_{x^2+y^2 \le x+y} (x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(x-\frac12)^2+(y-\frac12)^2 \le \frac12} (x+y)\,dx\,dy \stackrel{\uparrow}{=}$

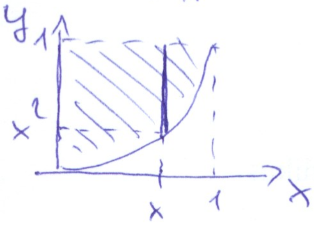
$x = \frac12 + r\cos\varphi$
$y = \frac12 + r\sin\varphi$
$r \le \frac{1}{\sqrt2}$

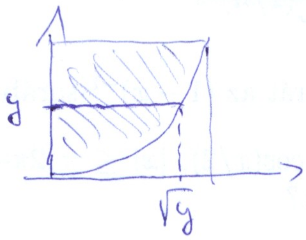
$= \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt2}} \int\limits_0^{2\pi} (1 + r\cos\varphi + r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt2}} 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{2}$

$(r)\quad(\varphi)$

$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 0$

b) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt y} 12xze^{zy^2}dx\right) dy\,dz =$





$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 6zye^{zy^2}dy\right) dz =$

$= \int\limits_0^1 \left[3e^{zy^2}\right]_{y=0}^1 dz =$

$= \int\limits_0^1 3(e^z - 1)\,dz = 3(e-2)$