# 6. tétel

A duál feladat felírása (5.4 222.o-ig), Duál feladat értelmezése (5.5 233.o-ig) Gyenge dualitási tételek (5.6.)

Minden LP feladathoz tartozik egy másik LP probléma, amit az eredeti feladat **duálisának** nevezünk. Az eredeti feladatot **primálnak** nevezzük.

max → min

$z, x_1 \dots x_n \rightarrow w, y_1 \dots y_4$

primál: normál max. feladat

$$\begin{array}{c} A\underline{x} \le \underline{b} \\ \underline{x} \ge \emptyset \\ \hline \max\ \underline{c}^T \underline{x} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} A^T \underline{y} \ge \underline{c} \\ \underline{y} \ge \emptyset \\ \hline \min\ \underline{b}^T \underline{y} \end{array}$$

duál: normál min. feladat

pl

$$\begin{array}{rl} 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 & \\ 4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 20 & \\ 2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \le 8 & \\ \max\ 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & \end{array} \xrightarrow[\text{alakja}]{\text{duális}} \begin{array}{rl} 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60 & \\ 6y_1 + 2y_2 + 1{,}5y_3 \ge 30 & \\ y_1 + 1{,}5y_2 + 0{,}5y_3 \ge 20 & \\ \min\ 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 & \end{array}$$

$x_i$ primál változóhoz i-edik duál korlát tartozik és fordítva

## Duál feladat értelmezése ?

döntéshozók rendelkezésére álló erőforrásokkal értékével kapcsolatos duál változók

- Maximumfeladat duálisának interpretációja: pl Dakota probléma az egyes erőforrások felhasználásának egységára. Mi az a minimum ár, amiért megéri azt termelni? (duál változó – erőforrás árnyékár)

duál korlátba tartozó tápanyag egységára

- Minimumfeladat duálisának interpretációja: pl: étrend probléma, az egyes tápanyagok eladási árának meghatározása. Duálban maximalizáljuk az egészséges tápanyagmennyiségre jutó bevételt, ugyanakkor versenyképes árat kell biztosítani.

**Gyenge dualitási tétel:** Legyen $\underline{x}$ a primál feladat, az $\underline{y}$ pedig a duál feladat tetszőleges lehetséges megoldása. Ekkor $\underline{c}^T \cdot \underline{x} \le \underline{b}^T \underline{y}$

$Ax \le b \,/\cdot y^T$ | $y^TA \ge c^T \,/\cdot x$

$y^TA\cdot x \le y^Tb$ | $y^TAx \ge c^Tx$

$c^T\cdot x \le y^Tb$

Bizonyítás: $A\underline{x} \le \underline{b} \,/\cdot y^T$ | $A^T\cdot \underline{y} \ge \underline{c} \,/\cdot x^T$

$y^T\cdot A\cdot \underline{x} \le y^T\cdot \underline{b}$ | $\underline{x}^TA^T\underline{y} \ge \underline{x}^T\underline{c}$

$(y^TA\cdot \underline{x})^T = y\cdot A^T\cdot \underline{x}^T \le (y^T\cdot \underline{b})^T = y\cdot b^T$ | $\underline{x}^T\cdot A^T \underline{y} \ge (\underline{x}^T\underline{c})^T$

$y A^T \underline{x}^T \le y \underline{b}^T$ | $\underline{x}^T A^T y \ge \underline{x}\cdot c^T$

$$\underline{x}\, \underline{c}^T \le \underline{b}^T\cdot y$$

Lemma 1: Legyen $\hat{\underline{x}}$ primál, míg $\hat{y}$ duál feladat egy lehetséges megoldása. Ha $\underline{c}^T\hat{\underline{x}} = \underline{b}^T\hat{y}$, akkor $\hat{\underline{x}}$ az optimális megoldás a primál, $\hat{y}$ optimális megoldás a duál feladatra.

Bizonyítás: gyenge dualitási tételből: $\hat{x}\underline{c}^T \le \underline{b}^T y$ és $\underline{x}\,\underline{c}^T \le \underline{b}^T\cdot \hat{y}$ és $c^T\hat{\underline{x}} = \underline{b}^T\hat{y}$ bármely lehetséges $x$ primálra; ahol $\underline{c}^T\underline{x}$-re felső korlát és $\underline{c}^T\hat{\underline{x}}$ eléri ezt a felső korlátot ⇒ szükségképpen optimális

$x\cdot c^T \le \hat{x}\cdot c^T \ \forall x \Rightarrow$ optimális az $\hat{x}\cdot c^T$ ⇐ $c^T\hat{x} = b^T\hat{y}$ ⇒ $b^T\hat{y} \le b^Ty \ \forall y$ ⇒ optimális a $b^T\hat{y}$

Lemma 2: Ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos, akkor a duálisnak nincsen lehetséges megoldása

Bizonyítás: tegyük fel, hogy primálnak van megoldása, így ha a duálisnak lenne, akkor $\underline{c}^T\underline{x} \le \underline{b}^T y$, ~~miatt~~ illetve a $\underline{c}^T\underline{x} \to \infty$, ezért nem tudnánk olyan $y$-t mondani, ami ennél nagyobb lenne.

Lemma 3: Ha a duális feladat célfüggvénye nem korlátos, akkor a primálnak nincsen lehetséges megoldása.

Bizonyítás: tegyük fel, hogy a primálnak van megoldása

$\underline{c}^T\underline{x} \le \underline{b}^T y$, ahol $\underline{b}^Ty$-t minimalizáljuk, de mivel $\underline{b}^Ty$ $-\infty$, ezért nem tudjuk, nincs kisebb nála.