7. tétel

(5.7.)

Erős dualitási tétel (5.6. 233.o.-tól), Gazdasági értelmezés: árnyékárak
Dualitás és érzékenységvizsgálat (5.8.)

Erős dualitás tétel: ha létezik optimális megoldása a primál feladatnak, akkor a duálnak is létezik és a célfüggvény értékük megegyezik.

Bizonyítás: legyen BV a primál feladat optimális bázisa
primál feladat: normál max. feladat, m egyenlet, n változó, z opt. célfv. érték

$$c_{BV} \cdot B^{-1} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$$

① Mutassuk meg, hogy $c_{BV} \cdot B^{-1}$ duál lehetséges megoldás!

mivel BV optimális ⇒ primál opt. tábla célfv. sorában n db eh. $\geq \emptyset$, azaz
x_j célfv. eh-ja $\bar{c}_j = c_{BV} \cdot B^{-1} \cdot a_j - c_j \geq \emptyset$ $\quad j = 1, \ldots, n$

$$[y_1, y_2, \ldots, y_m] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} - c_j \geq \emptyset$$

$/A^T \cdot y \geq c/$ $\quad y_1 \cdot a_{1j} + y_2 \cdot a_{2j} + \ldots + y_m \cdot a_{mj} \geq c_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$

ebből következik, hogy $c_{BV} \cdot B^{-1}$ n db duál feltételt kielégíti
+ BV-hez tartozó célfv.-ben y_i, azaz $c_{BV} \cdot B^{-1}$ i-dik eleme $i = 1, \ldots, m$
értékekre $y_i \geq \emptyset$ ⇒ $c_{BV} \cdot B^{-1}$ valamennyi értéke nemnegatív
⇒ $c_{BV} \cdot B^{-1}$ duál lehetséges (feltételeket kielégíti + ∀eh $\geq \emptyset$)

② Mutassuk meg, hogy $\bar{z}$ megegyezik a $c_{BV} \cdot B^{-1}$ pontban a duál célfv. értékével

- BV perem z optimális értéke: $c_{BV} \cdot B^{-1} \cdot b$
- duál lehetséges $c_{BV} \cdot B^{-1}$ pontban a célfv. opt. értéke:

$$b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + \ldots + b_m \cdot y_m = [y_1, y_2, \ldots, y_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix} = c_{BV} \cdot B^{-1} \cdot b$$

③ Találtunk egy primál és duál lehetséges megoldást, amelyhez azonos célfv. érték tartozik. Lemma 1-et felhasználva (ami: $\hat{x}$ primál leh. és $\hat{y}$ duál leh., $c^T \cdot \hat{x} = b^T \cdot \hat{y}$ ⇒ $\hat{x}$ és $\hat{y}$ optimális), $c_{BV} \cdot B^{-1}$ duál optimális és $\bar{z} = \bar{w}$

Az i-dik korlátozó feltételhez tartozó árnyékár az az érték, amennyivel az optimális z értéke javul (max. feladatnál nő, min. feladatnál csökken), amikor b_i-t 1-gyel növeljük.

$c_{BV} \cdot B^{-1} = [y_1\ y_2\ y_3] = [\emptyset\ 10\ 10]$ opt. $z = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$

$c_{BV} \cdot B^{-1}$ nem változik, de $z' = 48y_1 + 21y_2 + 8y_3$; $z' - z = y_2 = 10$

$z' = z \pm \Delta b_i \Rightarrow z' = z + 10$

Egy maximumfeladat i-dik korlátozó feltételéhez tartozó árnyékár az i-dik duál változó optimális értéke.

$\leq$ esetén $y \geq \emptyset$; $\geq$ esetén $y \leq \emptyset$; $=$ esetén y etn.

Dualitás és érzékenységvizsgálat

áttekintés: BV egy bázisváltozókból álló lehetséges bázismo.

BV akkor és csak akkor optimális, ha a hozzátartozó $c_{BV} \cdot B^{-1}$ duál megoldás lehetséges.

Érintett érzékenységvizsgálatok

- célfv.-ben megváltozik NBV együtthatója

  $y = [\emptyset\ 10\ 10]$ $6y_1 + 2y_2 + 1{,}5y_3 \geq c_2$ $35 \geq c_2$ — eddig marad BV optimális

- megváltozik egy NBV oszlopa

  $5y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq c_2$ $c_2 = 43$ $y = [0\ 10\ 10]$ $40 \geq 43$ ↯ nem maradt optimális

- új tevékenységet vezetünk be

  $y_1 + y_2 + y_3 \geq c_4$ $y = [\emptyset\ 10\ 10]$ $c_4 = 15$ $20 \geq 15$ opt. bázis

Tehát végig azt vizsgáljuk, hogy a $c_{BV} \cdot B^{-1}$ ~~opt~~ duál lehetséges marad-e a változtatás során.