9. tétel

A kiegyensúlyozott és nem kiegyensúlyozott szállítási feladat, tiltótarifa (6.1), Bázismegoldás keresése, hurok (6.2), Szállítási feladat szimplex táblája, disztribúciós módszer, Optimalitási kritérium (6.3)

$$\sum_j x_{ij} \le s_i \ \forall i \qquad x_{ij} \ge 0 \ \forall i,j$$

Szállítási feladat: + feltételek: $\sum_i x_{ij} \ge d_j \ \forall j \quad \min\left(\sum c_{ij} x_{ij}\right)$

	w_j		s_i
	x_{11} c_{11}	x_{1n} c_{1n}	s_1
	x_{m1} c_{m1}	x_{mn} c_{mn}	s_m
	d_1	d_m	

- m kínálati pontból álló halmaz, egy pont legfeljebb s_i egységet képes szállítani
- n keresleti pont, ahova szállítás történik, a j-dik felvevőhelynek legfeljebb d_j egységnyire van szüksége.
- minden olyan egység, amit az i-dik helyen állítanak elő és a j-dik helyen használnak fel, c_{ij} költséggel jár (szállítási költség)
- i-dik helyről j-dik helyre szállított mennyiség: x_{ij}

Ha a teljes kínálat egyenlő a teljes kereslettel, akkor **kiegyensúlyozott szállítási feladatról** beszélünk. Egyéb esetben a feladat nem kiegyensúlyozott lesz.

$\sum_j d_j > \sum_i s_i$

$s_{m+1} = \sum_j d_j - \sum_i s_i$

- összkereslet > összkínálat ⇒ fiktív kínálati pont felvétele, aminek a kínálata = hiány, (egyes keresletek kielégítetlenek maradnak) szállítási költség = egyes keresleti pontokon fellépő kielégítetlenségi büntetéssel (egyes pontokon def. büntetést erre), az a **tiltótarifa**
- összkínálat > összkereslet ⇒ 0 költségű fiktív felvevőhely felvétele a modellbe $\sum_i s_i \ge \sum_j d_j \Rightarrow d_{n+1} = \sum_i s_i - \sum_j d_j$

	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	
	1	1	0	0	35
	0	0	1	1	30
	1	0	1	0	45
	0	1	0	1	20
Σ	8	6	9	12	65

Bázismegoldás keresése

Huroknak nevezzük legalább négy különböző cellából álló rendezett sorozatot, ha

1. bármely két egymást követő cella vagy ugyanabban az oszlopban, vagy sorban van
2. három egymást követő cella nem fekszik ugyanabban sorban/oszlopban
3. a sorozat utolsó cellája a sorozat első cellájával ugyanabban a sorban/oszlopban fekszik

Tétel: egy kiegyensúlyozott szállítási feladatnál, amennyiben m kínálati és n keresleti pont van, akkor $n+m-1$ változóból álló halmazhoz tartozó cellák akkor és csak akkor nem tartalmaznak hurkot, ha ez az $n+m-1$ változó egy bázismegoldást alkot.

Bizonyítás: $n+m-1$ cella akkor és csak akkor nem tartalmaz hurkot, ha az ezekhez tartozó $n+m-1$ oszlop lineárisan független

1. Északnyugati sarok módszere:

Bal felső sarokból indulva $x_{1,1}$-et olyan nagyra választjuk, amennyire lehetséges (teljes kínálat és kereslet közül a kisebbre). Az ehhez tartozó sort/oszlopot töröljük, és az oszlop a d_1-et s_1-d_1-re / az s_1-et s_1-d_1-re választjuk (utolsónál mindkettőt töröljük). Biztosan bázismegoldás, mert:

2	3			~~5~~ ~~3~~ ~~x~~
	1			~~1~~ x
	0	2	1	~~3~~ 1
~~2~~ x	~~4~~ ~~1~~ ~~0~~ x	~~2~~ x	1	

- biztosan nem adunk a bázisváltozónak negatív értéket
- minden egyes kínálati és keresleti feltétel ki lesz elégítve
- $m+n$ oszlopot és sort kell törölnünk
- $m+n-1$ változóhoz rendel értéket, melyek nem alkotnak hurkot

2. Minimális költség módszere: foglalkozik a szállítási ktg-gel is. Megkeressük azt a változót, amelyhez a legkisebb költség tartozik, a keresleti és kínálati korlát közül a kisebb(et) értékkel felvenni. Adott korlátot kihúzzuk, másikat redukáljuk az értékkel. Utolsó cellánál mindkettőt töröljük. Nem feltétlenül a minimális összköltséget adja.

5 [2]	[3]	[5]	[6]	~~5~~ x
2 [2]	8 [1]	[3]	[5]	~~10~~ ~~2~~ x
5 [3]	[8]	4 [4]	6 [6]	~~15~~ ~~10~~ ~~6~~ x
~~12~~ ~~10~~ ~~5~~ x	~~8~~ x	~~4~~ x	~~6~~ x	

3. Vogel módszere

① Minden sorra és oszlopra büntetés számítás (két legkisebb szállítási költség különbsége)

② Maximális büntetés kiszámítása

③ Minimális szállítási költség kiválasztása

④ Sor/oszlop törlése, változó érték felvétele, oszlop/sor érték redukálása, büntetés újraszámolása; GOTO ①

				kínálat	
	0 (6)	5 (7)	5 (8)	~~10~~ ~~5~~ ~~0~~ x	7-6=1, 8-6=2
	15 (15)	(80)	(78)	~~15~~ x	78-15=63
kereslet	~~15~~ x	~~5~~ x	~~5~~ x		
	15-6=9	80-~~7~~=73	78-8=70		

/köv. oldal után érdekes/

~~Disztribúciós~~ Hurok módszer, azaz a szállítási szimplex módszer

① Határozzuk meg azt a változót, amelyet bevisszük a bázisba.

② Keressük meg azt a hurkot, amelyik tartalmazza a bázisba belépő változót (biztosan 1 ilyen van), és a többi BV közül néhányat.

③ Hurokban lévő cellákat számolva jelöljük meg párosként, amelyek a beléptetendő változótól páros számú cellányira vannak. Ugyanígy páratlanként azokat, amelyek páratlan számú cellányira vannak.

④ Keressük meg a páratlan cellák közül a legkisebb értékűt, ez az érték legyen Θ. Az a változó lép ki, amely a Θ-hoz tartozó cella. Báziscsere végrehajtása: $\forall$ páratlan cella értéke csökken Θ-val, párosoké nő Θ-val, hurkon kívüliek nem változnak.

Ha $\Theta = \emptyset$, akkor a bázisba belépő változó értéke $\emptyset$ lesz és egy régi $\emptyset$ értékű ki fog lépni, de ilyenkor előző m.o. is degenerált m.o. volt.

35-20			0+20	35
10+20	Θ=20	20-20		50
		10+20	30-20	40
45	20	30	30	

x_{14} beválasztása

(1,4), (3,3), (2,1) páros cella

(1,1), (3,4), (2,3) páratlan cella

legkisebb értékű $x_{2,3}$

(1,1), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), és (3,4) nem alkothatnak hurkot

↳ lehetséges bázismegoldások

Optimalitási feltétel: az $\underline{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}; \ldots; x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ vektor a primál szállítási feladat optimális megoldása, ha létezik $y^T = (\underline{u}^T, \underline{v}^T)$ duális lehetséges megoldás, amire igaz, hogy $\forall\, \underline{x}_{ij}$ bázisvektorra $\underline{u}_i + \underline{v}_j = c_{ij}$

Bizonyítás: az $\underline{x}$ optimális megoldás, ha $A\underline{x} = \underline{b}$, és $\underline{x} \geq \emptyset$ és az erős dualitási feltétel miatt, ha $\underline{c}^T \cdot \underline{x} = y^T \cdot \underline{b}$

$\Rightarrow \underline{c}^T \cdot \underline{x} = y^T \cdot A\,\underline{x}$

$\forall\, \underline{x}_j \neq \emptyset$-ra: $\quad \underline{c}_{ij} = (y^T A)_{ij} = (\underbrace{A^T \cdot y}_{b})_{ij} = \underline{u}_i + \underline{v}_j$

$A^T \cdot y \geq \underline{c}$

c_{ij}-hez tartozó duálfeltétel bal oldala

Vagyis beláttuk, hogy az $\underline{x}_{ij}$ bázisváltozóra $\underline{c}_{ij} = \underline{u}_i + \underline{v}_j$

Szállítási szimplex módszer

1\. lépés: A nem kiegyensúlyozott feladatot egyensúlyozzuk ki

2\. lépés: Keressünk egy lehetséges bázismegoldást (3 módszer egyikével)

3\. lépés: Alkalmazzuk az aktuális lehetséges bázismegoldásban a következő összefüggést: $\underline{u}_1 = \emptyset$ és $\underline{u}_i + \underline{v}_j = \underline{c}_{ij}$, így megkapjuk: $[u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n]$-et

4\. lépés: Ha $\overbrace{\underline{u}_i + \underline{v}_j - \underline{c}_{ij} \geq \emptyset}^{\text{maximalizálási feladatban}}$ $\forall$ NBV-re, akkor az aktuális lehetséges bázismegoldás optimális. Ha nem, akkor a legnagyobb abszolút értékű negatív $\underline{u}_i + \underline{v}_j - \underline{c}_{ij}$ értékhez tartozó $\underline{x}_{ij}$ változót léptetjük be a bázisba a hurok módszerrel. előző oldalon

5\. lépés: Alkalmazzuk az új lehetséges bázisra a 3, 4 lépéseket.

4' lépés: Ha minimalizálási feladatunk van, akkor $u_i + v_j - c_{ij} \leq \emptyset$ $\forall$ NBV-re teljesül $\rightarrow$ optimális, egyébként legnagyobb pozitív értékhez tartozó x_{ij} fog belépni