12. tétel

Egészértékű lineáris programozási modellek (8.1); A korlátozás és szétválasztás módszere (8.3, 8.4), Hátizsák feladatra (8.5.)

Egy olyan LP feladatot, amelyikben néhány vagy minden változó csak nemnegatív egész értéket vehet fel, integer programozási feladatnak nevezünk (IP).

Egy olyan IP-t, amiben minden változónak egészértékűnek kell lennie, ~~tiszta~~ tiszta egészértékű programozási feladatnak hívunk.

Egy olyan IP-t, amiben csak néhány változóra követeljük meg az egészértékűséget, vegyes egészértékű programozási feladatnak hívunk.

Egy IP feladat ~~LP-lazí~~ LP-lazítása az az LP feladat, amelyet úgy kapunk az IP-ből, hogy a változókra tett minden egészértékűségi vagy bináris feltételt eltöröljük. Az LP-lazítás tehát egy kevésbé korlátozott változata IP-nek, ebből következik, hogy bármelyik IP lehetséges megoldáshalmaza része az LP-lazítás megoldáshalmazának.

! LP-lazítás optimál z értéke ≥ IP optimális z értéke !

Korlátozás és ~~szétoszt~~ szétválasztás módszere tiszta IP feladatok esetén

Megjegyzés: egy tiszta IP feladat LP-lazításának egy olyan optimális megoldása, amelyben minden változó egészértékű, egyúttal optimális megoldása az IP-nek is.

Először oldjuk meg az LP-lazítást, ha az optimális megoldás egészértékű, akkor készen vagyunk. :)

$\max z = 8x_1 + 5x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$ (munkaidő)

$9x_1 + 5x_2 \leq 45$ (deszkalap)

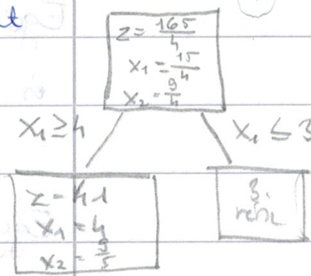
$x_1, x_2 \geq 0$ $\quad x_1, x_2$ egész

optimális megoldása:

$z = \frac{165}{4}$

$x_1 = \frac{15}{4}$ $\quad x_2 = \frac{9}{4}$

Ha nem egészértékű, akkor a kapott z érték lesz az IP feladat felső korlátja. Részekre kell bontani a feladatot valamelyik tetszőlegesen kiválasztott ~~nem~~ törtértékű változója mentén.



Ágaztatás az adott változó szerint (két részfeladatnak nincs közös metszete). Az egyik még nem megoldott részfeladatot oldjuk meg.

- Előfordulhat, hogy egy részfeladatnak nincs megoldása: X-szel jelöljük.
- Amikor egy részfeladat további hasznos információt már nem eredményezhet, akkor a részfeladat (csúcs) felderített.
- Ha egy részfeladat optimális megoldásában minden változó értéke egész, akkor találtunk egy megoldás-jelöltet. Addig tartjuk ezt, amíg az IP egy jobb lehetséges megoldását nem határozzuk meg.
  A megoldás-jelölt z értéke egy alsó korlát az eredeti IP optimális z értékére.
- Ha elfogytak a megoldatlan részfeladatok, megnézzük a megoldás-jelöltet → ez lesz az optimális megoldás IP-re.

Egy részfeladat háromféleképpen lehet felderített:

- Részfeladat nem lehetséges
- Részfeladatnak van olyan opt. m. o.-a, ahol ∀ változó egész értékű
- A részfeladat optimális z értéke nem haladja meg az alsó korlát akt. LB értékét

Egy részfeladat a következő esetekben zárható ki:

- Részfeladat nem lehetséges
- Az LB (eddigi legjobb megoldás-jelölt z értéke) legalább akkora, mint a részfeladat z értéke.

Visszalépéses / LIFO szabály: legkésőbb létrehozott részfeladatot oldjuk meg először; így hamar találunk megoldás-jelöltet.

Keresztlépéses: csúcs ágaztatása után az összes keletkező részfeladatot megoldja, utána lép a legígéretesebb z értékű felé.

Vegyes egészértékű programozási feladatokra ugyanezt használjuk úgy, hogy csak az egészértékű változók esetében ágaztathatunk szét.