5. tétel

Grafikus érzékenységvizsgálat (5.1), Képletek (5.2), Érzékenységvizsgálat (5.3)

Az érzékenységvizsgálat azt elemzi, hogy egy LP feladat paramétereinek változásai hogyan hatnak az optimális megoldásra.

1. Célfüggvény módosítás hatásának vizsgálata: a célfüggvény együttható annak a meredekségét befolyásolja, így „elfordítja" a megoldást, másik extremális pontot fog érinteni a célfüggvény.

2. LP feladat jobb oldalán történő módosítás hatásának vizsgálata: párhuzamosan tolja el a feltételt. – ha a feltétel aktív volt, akkor változik opt. célfv. érték

3. Árnyékár: a feltétel jobb oldalának növelése 1-gyel mennyire módosítja a célfüggvény értékét (változatlan bázis mellett csak!)

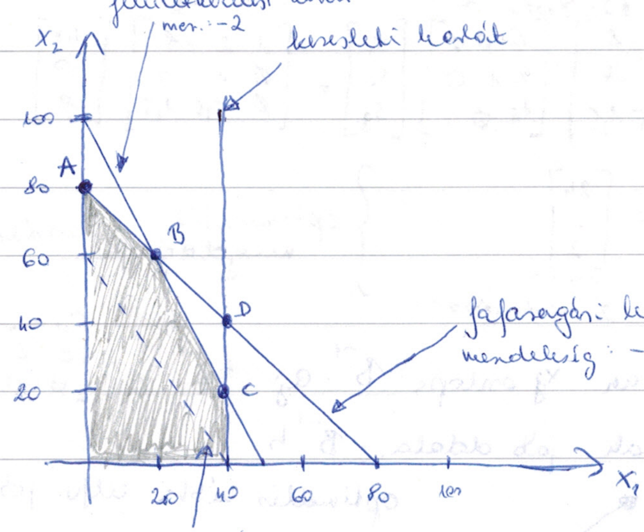
Példa: $\max z = 3x_1 + 2x_2$

feltételek: $2x_1 + x_2 \leq 100$ (felületkezelési korlát)

x_1: gyártott katonák száma $\quad x_1 + x_2 \leq 80$ (fafaragási korlát)

x_2: gyártott vonatok száma $\quad x_1 \leq 40$ (keresleti korlát)

$x_1, x_2 \geq \emptyset$ (nemnegatív korlát)



1. c_1: katonák számának eh.

ha profitfv. meredeksége kisebb lesz, mint fafaragási korláté, vagy nagyobb, mint felületkere-lési korláté, bázis változik

$2 \leq c_1 \leq 4$ marad

opt. tábla
$$\begin{cases} z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280 \\ -2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24 \\ -2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8 \\ x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}5s_2 + 1{,}5s_3 = 2 \end{cases}$$

kiinduló tábla
$$x_{BV} = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad x_{NBV} = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20$$
$$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

A c_{BV} az $1 \times m$-es $[c_{BV_1}\ c_{BV_2} \dots c_{BV_m}]$ sorvektor. $[0\ 20\ 60]$

A c_{NBV} az az $1 \times (n-m)$-es sorvektor, melynek koordinátái az NBV-k együtthatói (NBV sorrendben) $[30\ 0\ 0]$

Legyen B az az $m \times m$-es mátrix, melynek j-edik oszlopa a j. bázisváltozóhoz tartozó oszlopvektor. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 2 \end{bmatrix}$

Legyen a_j korlátozó feltételeiben az x_j-hez tartozó oszlopvektor. $a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$ $a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Az N az az $m \times (n-m)$-es mátrix, melynek oszlopai a nembázis változókhoz tartozó oszlopok (NBV sorrendjében). $N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Az $m \times 1$-es b oszlopvektor a jobboldali korlátokból álló vektor. $b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$

Probléma felírása fentiek segítségével:

$$B\underline{x}_{BV} + N \cdot \underline{x}_{NBV} = \underline{b}$$
$$\underline{x}_{BV}, \underline{x}_{NBV} \geq 0$$
$$\underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BV} + c_{NBV} \cdot x_{NBV} \to \text{maximalizáljuk}$$

adott x_j változó esetén: $B^{-1} \cdot a_j$

Korlátozó feltételek B^{-1}-gyel szorozva

$$B^{-1} \cdot B \cdot \underline{x}_{BV} + B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV} = B^{-1} \cdot \underline{b} \Rightarrow \underbrace{\underline{x}_{BV} + B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV}}_{\text{opt. tábla korlátozó feltétel bal oldal}} = \underbrace{B^{-1} \cdot \underline{b}}_{\text{jobb oldala}} \quad / \cdot \underline{c}_{BV}$$

$$\underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BV} + \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV} = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b} \quad / \text{ezt kivonjuk a célfüggvényből}$$

$$\cancel{\underline{c}_{BV} \underline{x}_{BV}} - \cancel{\underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BV}} + \underline{c}_{NBV} \cdot \underline{x}_{NBV} - \underline{c}_{BV} B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV} + \underline{c}_{BV} B^{-1} \cdot \underline{b} = 0$$

$$\underbrace{\underline{x}_{NBV} \overbrace{(\underline{c}_{NBV} - \underline{c}_{BV} B^{-1} N)}^{\text{optimális tábla elemeiben}}}_{0 \text{ lesz a célfüggvényben}} + \underbrace{\underline{c}_{BV} B^{-1} \underline{b}}_{\text{optimális célérték feltétel jobb oldala}} = 0$$

* TÉTEL VÉGÉN SZÉPEN KIFEJTVE

B^{-1} meghatározása: Gauss-Jordan elimináció $(E|B) \to (B^{-1}|E)$

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{BV} + B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV} = B^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \Bigg\} \text{eredeti probléma}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1{,}25 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}}_{\text{1' szerinti feltétel}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{2' szerinti jobboldal}} \Bigg\} \text{optimális megoldás korlátozó feltételei}$$

optimális tábla korlátaiban x_j oszlopa: $B^{-1} \cdot a_j$ $\quad B^{-1} \cdot a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1{,}25 \end{bmatrix}$

optimális tábla korlátainak jobb oldala: $B^{-1} b$

$$\bar{c}_j = \underline{c}_{BV} B^{-1} \cdot a_j - c_j$$

optimális tábla célfv. jobb oldala: $\underline{c}_{BV} B^{-1} \cdot \underline{b}$

x_j együtthatója opt. tábla célfv.-ben

optimális tábla célfv. x_j tagjának eh.-ja:

Induló tábla $z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$
$8x_1 + 6x_2 + 1x_3 + s_1 = 48$
$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + s_2 = 20$
$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + s_3 = 8$

Optimális tábla: $z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 2$[illegible]
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$
$x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}5s_2 + 1{,}5s_3 = 2$

$BV = \{s_1, x_3, x_1\}$ $NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$

Érzékenységvizsgálat általánosan

1. Célfüggvény együtthatóinak megengedett változása

$$\underline{c}_{NBV} - \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot N \leq 0 \text{ maradjon}$$

- NBV esetén: lineárisan annyit változtathatjuk, amennyit az optimális tábla megenged $x_2 = c_2 = 30$ $a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$

$c_j = 30 + \Delta$ $\bar{c}_j = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot a_j - c_j = [0\ 10\ 10] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - (30+\Delta) = 35 - 30 - \Delta = 5 - \Delta$

BV optimális marad, ha $\bar{c}_2 \geq 0 \Rightarrow 5 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 5$

amíg $c_2 \leq 35$ optimális marad a BV

- BV esetén: $\underline{c}_{BV}$ módosítása miatt $\underline{c}_{BV} \cdot B^{-1}$ módosulni fog, ami a célfüggvény együtthatóinak változásával jár $\rightarrow$ BV optimalitásának eldöntéséhez újra kell számolni a BV-hez tartozó célfüggvény

$x_1 = c_1 = 60 + \Delta$ lesz $c_{BV} = [0\ 20\ 60+\Delta]$ $c_{BV} \cdot B^{-1} = [0\ 10-0{,}5\Delta\ 10+1{,}5\Delta]$

$a_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$ $a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$; $c_1 = 60 + \Delta$, $c_2 = 30$, $c_3 = 20$

$\bar{c}_2 = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} * a_2 - c_2 = [0\ 10-0{,}5\Delta\ 10+1{,}5\Delta] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - 30 = 5 + 1{,}25\Delta$

$z + (5+1{,}25\Delta)x_2 + (10-0{,}5\Delta)s_2 + (10+1{,}5\Delta)s_3 = ?$

optimális marad, ha: $5 + 1{,}25\Delta \geq 0$; $10 - 0{,}5\Delta \geq 0$, $10 + 1{,}5\Delta \geq 0$ $\Rightarrow -4 \leq \Delta \leq 20$

azaz $56 \leq c_1 \leq 80$ között aktuális bázis optimális marad

2. Feltételek jobb oldalának változása: $B^{-1} \cdot \underline{b}$ változik, b vektor kifejezéseit ≥ 0-ra megoldva megkapjuk az intervallumot, ahol még optimális marad a megoldás

$b_2 = 20 \rightarrow b_2 = 20 + \Delta$ $B^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+2\Delta \\ 8+2\Delta \\ 2-0{,}5\Delta \end{bmatrix}$

$24 + 2\Delta \geq 0$; $8 + 2\Delta \geq 0$; $2 - 0{,}5\Delta \geq 0$ $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $-4 \leq \Delta \leq 4$

$16 \leq b_2 \leq 24$

Árnyékár meghatározása: $\underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b}'$ szorzat eredménye megadja az árnyékárat, ha $\underline{b}'$-ben $\underline{b}$ valamely koordinátáját 1-gyel növelem.

$\left(b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ volt}\right)$ $b' = \begin{bmatrix} 48 \\ 21 \\ 8 \end{bmatrix}$ $c_{BV} B^{-1} \cdot b' = 290$ (b-vel 280) $20 \rightarrow 21$ növelés 10-zel növeli

2-6

$$B \cdot \underline{x}_{BV} + N \cdot \underline{x}_{NBV} = \underline{b}$$

$$\underline{x}_{BV}, \underline{x}_{NBV} \geq \emptyset$$

B^{-1} : B-ből Gauss eliminációval

$$\max\left(\underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BV} + \underline{c}_{NBV} \cdot \underline{x}_{NBV} \right)$$

$$B \cdot \underline{x}_{BV} + N \cdot \underline{x}_{NBV} = \underline{b} \quad / * B^{-1}$$

$$\underbrace{B^{-1} \cdot B}_{E} \cdot \underline{x}_{BV} + B^{-1} N \cdot \underline{x}_{NBV} = B^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\underbrace{\underline{x}_{BV} + B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV}}_{} = \underbrace{B^{-1} \cdot \underline{b}}_{}$$

x_j esetén: $B^{-1} \cdot a_j$ — optimális tábla korlátozó feltételeinek bal oldala — optimális tábla korlátozó feltételeinek jobb oldala

$$B \cdot \underline{x}_{BV} + N \cdot \underline{x}_{NBV} = \underline{b} \quad / * \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1}$$

$$\underline{c}_{BV} \cdot B \cdot B^{-1} \cdot \underline{x}_{BV} + \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBU} = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BU} + \underline{c}_{BU} \cdot B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBU} = \underline{c}_{BU} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b}$$

ehhez hozzáadjuk az eredeti célfv. sort: $z - \underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BV} - \underline{c}_{NBV} \cdot \underline{x}_{NBV} = \emptyset$

ezt kapjuk: $z + \underbrace{(\underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BV} - \underline{c}_{BV} \cdot \underline{x}_{BV})}_{\emptyset} + (\underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV} - \underline{c}_{NBV} \cdot \underline{x}_{NBV}) = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b}$

$$z + \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot N \cdot \underline{x}_{NBV} - \underline{c}_{NBV} \cdot \underline{x}_{NBV} = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$z + \underline{x}_{NBV} \left(\underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot N - \underline{c}_{NBV} \right) = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b}$$

ez az optimális tábla célfv. sora

célfv. együtthatók: $\underline{x}_{NBV} \left(\underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot N - \underline{c}_{NBV} \right)$

célfv. optimális értéke (jobb oldala): $\underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{b}$ (z értéke)

x_j változó együtthatója célfv. soraiban $\bar{c}_j = \underline{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot \underline{a}_j - \underline{c}_j$