11. tétel

Hálózati alapmodellek (7.1.): legrövidebb út (7.2.), minimális költségű hálózati folyam problémák (7.5.), hálózati szimplex módszer (7.7.)

Egy gráfot/hálózatot szimbólumok két halmaza definiál, az élek és csúcsok. V halmaz elemei a gráf csúcsai, az A halmaz elemei az ~~e~~ élek.

(i, j) él $i \to j$

Az él egy csúcspontokból álló rendezett pár, amely megadja a két csúcspont közötti mozgás vagy áramlás lehetséges irányát.

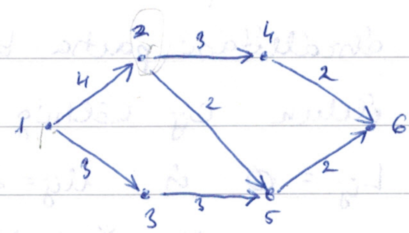
Lánc alatt az élek egy olyan sorozatát értjük, amelyben az egymást követő bármely két élnek egyetlen közös csúcsa van.

Az út egy olyan lánc, amelyben (az utolsó él kivételével) mindegyik él végpontja azonos a sorozatban következő él kezdőpontjával.

szall. költség

Legrövidebb út probléma: hálózat minden élének van adott hossza. Ilyenkor egy adott csúcsból az összes többibe vezető legrövidebb út meghatározása a cél. Ezt, nemnegatív költségű élek esetén a Dijkstra algoritmussal tehetjük meg.

Határozzuk meg $1 \to 6$ legrövidebb utat



$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \emptyset^* & 4 & 3 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \emptyset^* & 4 & 3^* & \infty & 6 & \infty \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \emptyset^* & 4^* & 3^* & 7 & 6 & \infty \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \emptyset^* & 4^* & 3^* & 7 & 6^* & 8 \end{bmatrix}$$

ugrottam 1 lépést

$$\begin{bmatrix} \emptyset^* & 4^* & 3^* & 7^* & 6^* & 8^* \end{bmatrix}$$

Visszafelé történik a legrövidebb út meghatározása

$\underset{2}{(5\to6)}, \underset{2}{(2\to5)}, \underset{4}{(1\to2)}$ v. $\underset{2}{(5\to6)}, \underset{3}{(3\to5)}, \underset{3}{(1\to3)}$

Minimális költségű hálózati folyam problémák (MKHFP) megoldható ~~egy~~ a szállítási szimplex egy általánosításával, úgynevezett hálózati szimplex módszerrel.

x_{ij}: az i csúcsból j csúcsba az (i,j) élen keresztül haladó folyam mennyisége

b_i: az i csúcs nettó kibocsátása (kiáramlás − beáramlás)

c_{ij}: az i csúcsból j csúcsba az (i,j) élen keresztül küldött egységnyi folyam szállítási költsége

L_{ij}: az (i,j) élen átmenő folyam alsó korlátja (ha nincs, $L_{ij} = 0$)

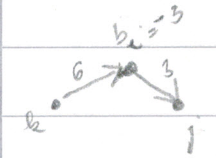
U_{ij}: az (i,j) élen átmenő folyam felső korlátja (ha nincs, $U_{ij} = \infty$)

Folyam-egyensúly egyenletek: $\min \sum_{\forall e} c_{ij} \cdot x_{ij}$

b_i def.-je: kiáramlás − beáramlás

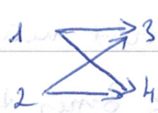
feltétel: $\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i$ ∀i csúcsra

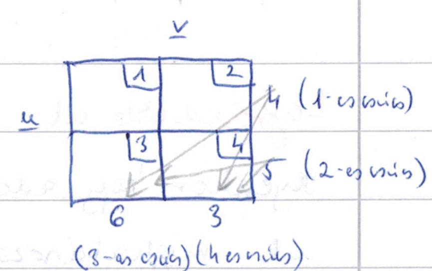
Kapacitás megkötés: $L_{ij} \le x_{ij} \le U_{ij}$ ∀(i,j) élre



• Szállítási problémára való alkalmazása

! csak kiegyensúlyozott esetben !





kínálati pontra: b_i a kínálattal egyenlő

keresleti pontra: b_i a kereslet (−1)-szerese

átszállítási pontra: $b_i = 0$

éleken c_{ij} költség

$L_{ij} = 0$ és $U_{ij} = \sum b_i$ a kínálati pontokra

(i,j) élek: (1,3) (1,4) (2,3) (2,4)

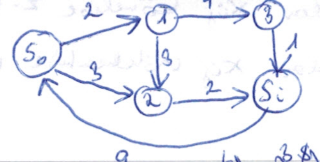
$c_{13} = 1$ $c_{14} = 2$ $c_{23} = 3$ $c_{24} = 4$

0 élkapacitás ⇒ 0 kap. megkötés

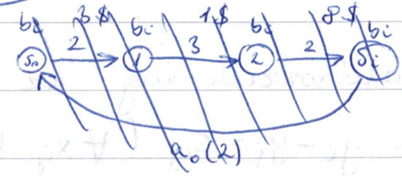
x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	j.o.	feltétel
1	1	0	0	4	1. csúcs
0	0	1	1	5	2. csúcs
−1	0	−1	0	−6	3 csúcs
0	−1	0	−1	−3	4. csúcs

$\min(x_{13} + 2x_{14} + 4x_{24} + 3x_{23})$

∀változó ≥ 0



• Folyam feladatra való alkalmazása



- forrásban és nyelőben $b_i = Ø$, mert felveszünk egy élt nyelőből forrásba (a_0), többi csúcsra $b_i = Ø$ $(b_{s_0} = b_1 = b_2 = b_3 = b_{s_i} = Ø)$
- minden x_{ij} változónak az együtthatója:
  - +1 az i-th csúcshoz tartozó folyamegyensúly egyenletben
  - −1 a j csúcshoz — " —
  - Ø a többi — " —

min $z = -x_0$

$x_{s_0,1}$	$x_{s_0,2}$	x_{13}	$x_{1,2}$	x_{3,s_i}	x_{2,s_i}	x_0	j.o.	Feltétel	
1	1	Ø	Ø	Ø	Ø	−1	= Ø	s_0 csúcs	csúcsokhoz tartozó folyamegyensúly feltételek
−1	Ø	1	1	Ø	Ø	Ø	= Ø	1-es csúcs	
Ø	−1	Ø	−1	Ø	1	Ø	= Ø	2-es csúcs	
Ø	Ø	−1	Ø	1	Ø	Ø	= Ø	3-as csúcs	
Ø	Ø	Ø	Ø	−1	−1	1	= Ø	s_i csúcs	
1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	≤ 2	$(s_0,1)$ él	élkapacitási megkötések
Ø	1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	≤ 3	$(s_0,2)$ él	
Ø	Ø	1	Ø	Ø	Ø	Ø	≤ 4	$(1,3)$ él	
Ø	Ø	Ø	1	Ø	Ø	Ø	≤ 3	$(1,2)$ él	
Ø	Ø	Ø	Ø	1	Ø	Ø	≤ 1	$(3,s_i)$ él	
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	1	Ø	≤ 2	$(2,s_i)$ él	

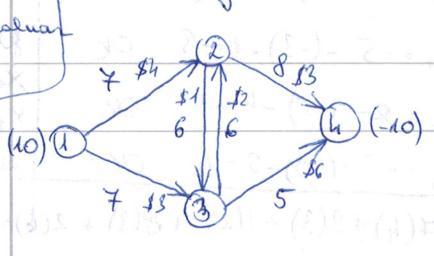
∀változó ≥ Ø

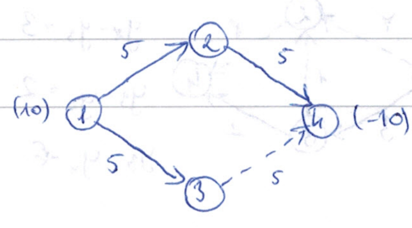
- élkapacitásnál adott élhez x_{ij} esetén 1, többi Ø

Hálózati szimplex módszer

feszítőfa: n csúcs, n−1 elemű halmaza éleknek, ahol ∀csúcs között van út és nem tartalmaz kört.

1. lépés: határozzuk meg a kiinduló lbm-et. Az n−1 bázisváltozó egy feszítőfát definiál. Jelezzük a felső korlátjukon álló NBV-ket szaggatott vonallal.





$y_1 = Ø$

$y_1 - y_2 = 4$

$y_2 - y_4 = 3$

$y_1 - y_3 = 3$

$y_1 = Ø$

$y_2 = -4$

$y_3 = -3$

$y_4 = -7$

2.a) Ha $x_{ij} = L_{ij}$, akkor x_{ij} növelése z-t nem csökkentheti $\Rightarrow \bar{c}_{ij} \le \emptyset$ kell

2.b.) Ha $x_{ij} = U_{ij}$, akkor x_{ij} csökkentése z-t nem csökkentheti $\Rightarrow \bar{c}_{ij} \ge \emptyset$ kell

$[y_1, y_2, \dots, y_n]$

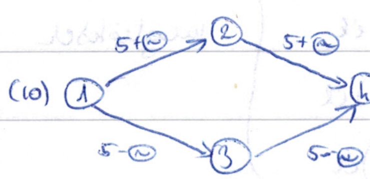
2. lépés: Határozzuk meg az $y_1, y_2, \dots, y_n$ szimplex szorzókat az $y_1 = \emptyset$ és $y_i - y_j = c_{ij}$ ($\forall x_{ij}$ bázisváltozóra) egyenletrendszerből. Az NBV-kre számoljuk ki a $\bar{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}$ célfüggvénysor együtthatókat. Aktuális bbm optimális, ha $\bar{c}_{ij} \le \emptyset$ minden $x_{ij} = L_{ij}$ esetén, és $\bar{c}_{ij} \ge \emptyset$ minden $x_{ij} = U_{ij}$ esetén. Ha a bázis nem optimális, válasszuk azt az NBV-t belépőnek, amelyik leginkább sérti az optimalitási feltételeket.

$\bar{c}_{34} = -3 - (-7) - 6 = -2$ — $x_{34} = U_{34} \Rightarrow \bar{c}_{34} \ge \emptyset$ nem teljesül $\Rightarrow$ belépő változó

$\bar{c}_{23} = -4 - (-3) - 1 = -2$ — $x_{23} = L_{23} \Rightarrow \bar{c}_{23} \le \emptyset$ teljesül

$\bar{c}_{32} = -3 - (-4) - 2 = -1$ — $x_{32} = L_{32} \Rightarrow \bar{c}_{32} \le \emptyset$ teljesül

3. lépés: Azonosítsuk az egyetlen kört, amit a belépő változóhoz tartozó él és az aktuális bbm feszítőfájának bizonyos élei ~~alkotnak~~ alkotnak. A folyammegőrzés szabályai szerint határozzuk meg a körbeli változók új értékeit. Az a változó lép ki, amelyik elsőnek éri el az alsó vagy felső korlátját a belépő változó megfelelő irányában történő módosítása során.

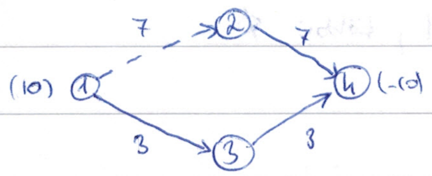


(1,2): $5 + \Theta \le 7 \Rightarrow \Theta \le 2$ — (2,4) $5 + \Theta \le 8 \Rightarrow \Theta \le 3$

(1,3): $5 - \Theta \ge \emptyset \Rightarrow \Theta \le 5$ — (3,4) $5 - \Theta \ge \emptyset \Rightarrow \Theta \le 5$

$\Theta = 2$, x_{12} kilép

$y_1 = \emptyset$; $y_1 - y_3 = 3$; $y_3 - y_4 = 6$, $y_2 - y_4 = 3$



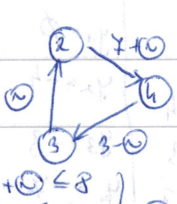
$y_1 = \emptyset$, ~~$y_2 = \emptyset$~~, $y_2 = -6$, $y_3 = -3$, $y_4 = -9$

$\bar{c}_{12} = \emptyset - (-6) - 4 = 2$ — $\bar{c}_{12} > \emptyset$ OK

$\bar{c}_{23} = -6 - (-3) - 1 = -4$ — $\bar{c}_{23} \le \emptyset$ OK

$\bar{c}_{32} = -3 - (-6) - 2 = 1$ — $\bar{c}_{32} \not\le \emptyset$ NEM OK $\rightarrow$ x_{32} belép

4. lépés: Az előző ~~aktuális~~ lépésben meghatározott kör élein folyammennyiségeket aktualizáljuk, GOTO 2

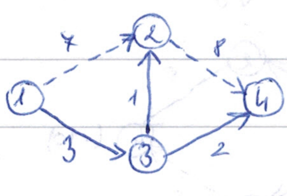


$7 + \Theta \le 8$

$\Theta \le 6$

$3 - \Theta \ge \emptyset$

$\Theta = 1$



$y_1 = \emptyset$ — $y_1 = \emptyset$; $y_2 = -5$; $y_3 = -3$, $y_4 = -9$

$y_1 - y_3 = 3$ — $\bar{c}_{23} = -5 - (-3) - 1 = -3$ OK

$y_3 - y_2 = 2$ — $\bar{c}_{12} = \emptyset - (-5) - 4 = 1$ OK

$y_3 - y_4 = 6$ — $\bar{c}_{24} = -5 - (-9) - 3 = 1$ OK

$z = 7(4) + 3(3) + 1(2) + 8(3) + 2(6) = 75\$$

BV:

$x_{13} = 3$ $x_{32} = 1$

$x_{34} = 2$

felső korláton álló NBV:

$x_{12} = 7$

$x_{24} = 8$

alsó korláton NBV

$x_{23} = \emptyset$