Bevezetés, Biometria kurzus általában, Analóg számítógépek

K: Miről szól ez a dolgozat?

A Biometria kurzus által felvetett egyes problémákra kíván választ adni. A kurzus neve obmk-n 'Műszaki és biológiai rendszerek elmélete', de érthető okokból továbbiakban is maradok biometriánál. Ez alatt természetesen csak az obmk-s kurzus első felét, a fuzzy előtti részt értem és fogom érteni a továbbiakban is.

K: Melyik verziója ez a dolgozatnak?

Ez a dolgozat második változata.

1. változat (Kézirat lezárva: 2008. március 17.)
2. változat (Kézirat lezárva: 2008. március 17.)

K: Miért készült el az a dolgozat?

A Biometria kurzus talán legnagyobb problémája, hogy haladó szabályozástechnikai témákat oktat úgy, hogy az évfolyam egy része (mindenek előtt: az orvosoknak) a világon semmilyen szabályozástechnikai ismerettel nem rendelkeznek (ami érthető is, hiszen az obmk-s tantervben ez *után* van folyamatszabályozás). Úgy láttam, hogy a megértés legnagyobb gátja mindössze „pár" alapfogalom hiánya. Számos kérdést kaptam, amiből az derül ki, hogy sokan az első óra tizedik percében elvesztik a fonalat a táblára felírt (számukra teljesen értelmetlen) dolgoktól, és többet nem is találják meg…

Benyó tanár úr olyan (főleg jel- és rendszerelméleti) kifejezéseket, tételeket stb. használ minden magyarázat nélkül, amikről sokaknak fogalma sincs. (És nem is kell, hogy legyen…) Abban a reményben írtam ezt az anyagot, hogy az ő helyzetüket meg tudom könnyíteni, ha tisztázom ezeket az alapvetéseket. Remélem, hogy pár alapfogalom megbeszélése önmagában is érezhetően segíteni fog. Ezt egészítem ki az egyes órák kapcsán felmerült konkrét kérdésekre adott válaszokkal. Persze magamtól nem találtam volna ki, hogy mi érthető és mi nem, úgyhogy ezen a ponton köszönet jár a feltett kérdésekért.

K: Hogyan olvassam ezt az anyagot?

Mindenek előtt: ez nem összefüggő anyag, szigorúan 'Gyakran ismételt kérdések' jellegű. (Mindazonáltal azt gondolom, hogy elég jól olvasható „egy rohamban" is.) Ennek két következménye van:

- Nem kell az egészet végigolvasni, ha egy konkrét fejezetre vagy kíváncsi, pl. a szabteches részt a villanyosok nyilván nyugodtan átugorhatják, hiszen egyébként is csak halálra unnák magukat. (Értelemszerűen leginkább ezeket a részeket igyekeztem az orvosok számára is kézzelfoghatóvá tenni, hiszen nekik ez a teljesen új.)
- Ez természetesen nem teljes leírása a felvetett témáknak – sem a szabtechnek, sem semminek. Arra ott van az órai jegyzetem, illetve a segédanyagok. Ehelyett a felmerült kérdésekre próbáltam válaszolni, legfeljebb annyival kiegészítve-megtoldva, ami a megértéshez kell. Jó esetben ezek a kérdések összefüggnek azzal, hogy az órai jegyzetből mi érthetetlen, így remélem, hogy ez a dolgozat kiegészíti azt a jegyzetet.

Képleteket és ábrákat (pláne szépeket :)) nem nagyon írtam/készítettem. Tudom, hogy ezzel nőne az élvezeti értéke ennek, viszont mivel benne van minden a füzetemben, nem akartam ezzel húzni az időt. Ráadásul feltételeztem, hogy ha valaki ezt elolvassa, annak jó eséllyel a keze ügyében van a füzetben lévő anyagom is.

Gondolom világos lesz a szövegből is, de azért hadd rögzítsem külön is: ez a dolgozat tökéletesen informális jellegű, pl. a definíciókat semmilyen vizsgán nem fogják semminek elfogadni :) Törekedtem arra, hogy *érthető* megfogalmazásait adjam az alapfogalmaknak, ez pedig néha kizárta (első körben) a precizitást. A dolgozat céljának ismeretében ez teljesen vállalható volt, de azért ez legyen világos.

Térjünk a lényegre :)

K: Van köze a Biometria kurzusnak a biometriához?

Nincs.

K: Akkor miről szól?

Villamos analóg számítógépek egyes kérdéseiről és pár haladó szabályozástechnikai témáról.

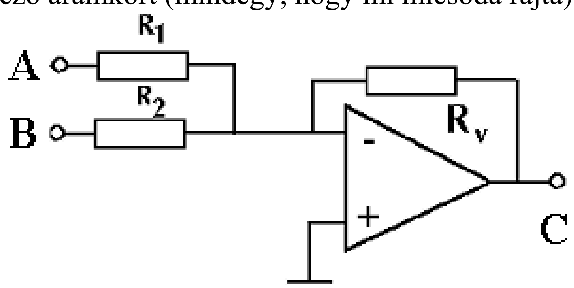
K: Mi az a "villamos analóg" számítógép?

A legtöbb ember azt nevezi számítógépnek, amin ezt az anyagot olvasod, vagy amin fut a Half Life 2. Igazából ez így nem precíz, mert ezek a _digitális_ számítógépek - jellemzőjük, hogy az általuk kezelt információ digitális formában ("0 és 1") áll rendelkezésre. Egy szám (pl. 5) tárolásához annak értékét el kell kódolni 0-1 sorozatba (101) és azt rögzíteni valamin, ami támogatja a 0-1 sorozatokat.

Ezzel állnak szemben az analóg számítógépek, melyek az információt analóg formában, tehát folytonos értékként tárolják valamilyen fizikai mennyiségben. Ez leggyakrabban feszültség, ez esetben beszélünk villamos analóg számítógépről. Egy ilyen számára az 5 az például 50 Volt.

K: Mire jók ezek a villamos analóg számítógépek?

Az elektronika fejlődésével egyre több matematikai műveletet el lehetett végezni analóg formában is. Ez azt jelenti, hogy ha egy művelet bemenőértékeit előállítjuk feszültségként, akkor konstruálható olyan áramkör, melyre rákötve ezeket a feszültségeket, az áramkör kimenete épp a matematikai művelet eredménye lesz. Példaként tekintsük a következő áramkört (mindegy, hogy mi micsoda rajta):



Ha ennek A és B pontjára adott feszültségeket kötünk (mondjuk 3 és 5 V), akkor a C ponton meg fog jelenni a két feszültség összege, 8V! Vagyis: áramköri elemek használatával elvégeztünk egy matematikai műveletet!

De ez még mind semmi: konstruálható olyan áramkör, ami az egy pontjára adott feszültséget kiintegrálja, logaritmusát veszi stb. Ilyen építőelemek felhasználásával egészen komplex matematikai feladatok oldhatóak meg a feszültségek nyelvén. Ennek leggyakoribb alkalmazása (a tárgy keretein belüli is jórészt erről lesz szó) különféle szabályozástechnikai feladatok megoldása.

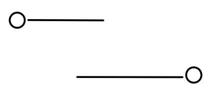
K: Milyen alkatrészekből építkezünk?

Ahogy láttam, nagyon sokaknak okoz problémát, hogy az órán egy szó nem hangzik el arról, hogy mik is azok a dobozok, amik felkerülnek a táblára. A következőkben ezeket fogom összefoglalni és – amennyire lehet – magyarázni. Ami a legfontosabb elöljáróban: mindegyik ilyen doboz egy szimbólum, ami egy *tényleges* áramkört reprezentál. Amit mi rajzolni fogunk, az tehát egy *fiktív* kapcsolási rajz, de tudni kell, hogy ha a dobozokat lecseréljük egy ismert helyettesítő áramkörre, akkor egy megépíthető kapcsolást kapunk!

Lássuk most a legfontosabb elemeket:

Be- és kimenet

Jele:



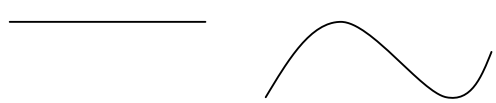
Bemenet esetén erre a pontra kell helyezni a feszültséget, míg kimeneti pont esetében a feszültségmérőt. Ezeket soha nem tüntetjük fel (tehát nem rajzolunk feszültséggenerátort a bemenetre és voltmérőt a kimenetre), hiszen ez számunkra most úgysem lényeges.

K: Hogy érted, hogy a bemenetre adott feszültség? A feszültség az potenciálkülönbség, tehát csak két pont között értelmezhető, nem? Akkor mi értelme van egy adott pont feszültségéről beszélni?

Képzelj minden egyes áramköri rajzhoz oda egy fel nem tüntetett pontot, és vedd úgy, hogy kivétel nélkül *minden* pont feszültségét ehhez a ponthoz viszonyítjuk! (Ezt a pontot nevezik földnek, de ez most nem lényeges.) A megjegyzés tehát jogos, valóban csak két pont között értelmezhető feszültség, de mi úgy tekintjük, hogy minden egyes pont feszültségét egy közös ponthoz viszonyítjuk, amely közös pontot – épp emiatt – igazából kár is feltüntetni. Az tehát, hogy (például) egy összegző bemenetére adott feszültséget kapcsolok, úgy értendő, hogy a közös földhöz *képest* hozok létre adott feszültséget azon a ponton. Pl. ha 1,5 V-ot akarok, akkor egy ceruzaelem negatív végét a közös földhöz érintem, a pozitívat pedig az összegző bemenetéhez. Ha ugyanezt megismétlem az összegző másik bemenetén egy 4,5-os laposelemmel, akkor a kimenetet -6 V lesz, that is: a kimenet *és* a föld *között* ennyit fogunk mérni. Világos, hogy a földnek csak gyakorlati jelentősége van, ezért az elvi rajzoknál mindig elhagyjuk.

Vezeték

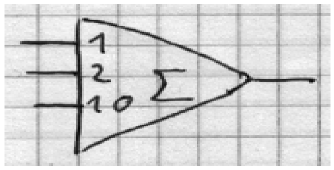
Jele



Feszültséget veszteségmentesen továbbít: ha egyik végére ráadunk egy feszültséget, a másik végén is pont annyi lesz. Ebből a tulajdonságából következik, hogy egy vezeték *mindig* azonos potenciálon lévő (szép szóval: ekvipotenciális) pontokat köt össze.

Összegző (v. szummátor)

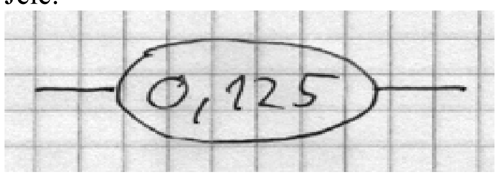
Jele:



A bemeneteket összeadja, azaz a kimenetén mért feszültség a bemeneten mért feszültségek összegének *(–1)*-szerese. (Az ellentetképzés okáról ld. még az integrátor utáni kérdéseket.) Az összegző egyes bemenetei *súlyozhatóak*, azaz elérhető, hogy az adott bemenet valamennyivel beszorzódjon, mielőtt az összegzésbe kerülne. Ezt jelzi a bemenetére írt szám: ha ez 10, akkor nem a bemenet értékét veszi be az összegzésbe, hanem annak 10-szeresét. (Ezzel kapcsolatban ld. még az integrátor utáni kérdéseket.)

„Szorzó” (precízen: együttható potenciométer v. potenciométeres szorzó)

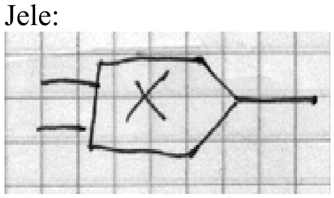
Jele:



A kimeneti feszültség a bemeneti feszültség valahányszorosa lesz, ahol „valahány” egy rögzített 0 és 1 közötti valós szám. (Tehát jelet csak csökkenteni tud (ezért értendő idézőjelben a szorzó), de azt is csak nulláig, előjelfordítás nélkül.)

Szorzó berendezés

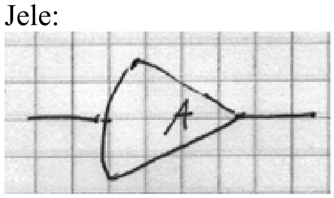
Jele:



A kimenet a két bemenetének szorzata lesz. A szorzó berendezés *nem keverendő* az előző pontban használt szorzóval! A különbség világos: a szorzó (potenciométeres szorzó, együttható potenciométer) az egyetlen bemenetét szorozza egy fix számmal, a szorzó berendezés pedig a két bemenetét egymással. (Nyilván egy szorzó berendezés egyik bemenetét fixen adott értékre kötve egy potenciométeres szorzót kapunk.)

Erősítő

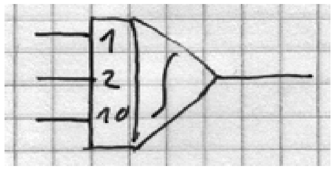
Jele:



A kimenet általában a bemenet „nagyon sokszorosa”, ideális esetben végtelenszerese. Bizonyos esetekben viszont rögzített számot rendelünk hozzá, mint erősítést, ekkor a kimenet a bemenet ennyiszerese lesz. (Ennek legfontosabbja a -1, azaz az előjelfordítás.) Ebben az esetben működése hasonló a potenciométeres szorzóhoz, de nem azonos, hiszen nyilván kiterjeszti annak tartományát: lehetséges az előjelfordítás, ill. a jel erősítése is. Az is világos, hogy a kettő együttes alkalmazásával már a jel tetszőleges valós számmal történő megszorzása megoldható.

Integrátor

Jele:



A kimeneti jel a bemenőjel időbeli integráltja. Ha például konstans 1 V-ot kötsz rá, akkor 1 mp után 1 V lesz a kimente, de 2 után már 2 és így tovább. Lineárisan növő bemeneti feszültség esetén a kimeneti feszültség parabolikusan fog nőni stb. Az integráláshoz szükség van kezdeti értékre is, ezt lehet feltüntetni az integrátor fölötti karikában. (Matematikailag erre azért van szükség, mert az integrálás művelete egy konstans erejéig határozatlan, pl. x "integráltja" (primitív függvénye, antideriváltja) $x^2/2+C$, ahol C tetszőleges valós szám lehet, a deriválás ettől még helyes eredményre fog vezetni. Na ezt a konstansot kell az integrátornak mint áramkörnek megadni. Szemléletes jelentése: megadja, hogy mi legyen az integrátor kimenete, amikor bekapcsoljuk a power gombbal. Hiszen utána nekiáll bőszen integrálni a bemenetet, de ez helyes lesz akkor is ha a kimenet -100V-ról indul, akkor is, ha 0 V-ról, és akkor is ha +100V-ról!)

A bemenőjelek ugyanúgy súlyozhatóak (azaz az odaírt konstanssal előzetesen beszorozhatóak) mint összegzőnél.

K: Miért van szükség szorzókra, ha az összeadók, integrátorok stb. bemeneteit úgyis szorozhatjuk?

K: Miért van olyan, hogy egy integrátor bemenetén szorzunk, de még külön elérakunk egy szorzót is? Pl. 10-szeres bemenetű integrátor, előtte 0,75-ös szorzó. Nem lenne egyszerűbb 7,5-et feltüntetni az integrátor bemenetén?

De, egyszerűbb lenne, csak nem szabályos :) Integrátorok, összegzők stb. bemenetén a szorzó értéke _csak_ 1; 2; 5 és 10 lehet! Hogy ennek mi az oka? Amikor még használtak ilyen eszközöket, akkor érdemes volt egyszerű szorzókkal ellátott integrátorokat, összegzőket stb. gyártani, és a pontos értéket külön szorzóval beállítani. (Különösen nagyobb sorozatban nyilván semmi értelme 7,5-es szorzójú bemenettel ellátott integrátort gyártani, egy 0,75 szorzó viszont filléres eszköz az integrátorhoz képest. Különösen, hogy a valóságban ez is egyetlen eszköz, amin házilag bebarkácsolható egy adott szorzás.) Ezért kell a 7,5-es szorzást külön szorzóval megvalósítani. Tanulság röviden: integrátor, összeadó stb. bemenetén csak 1;2; 5 és 10-szeres erősítést szabad feltüntetni! (A dolognak persze ma már valóban csak elvi jelentősége van, hiszen ilyen eszközöket évtizedek óta nem használnak ilyen alkalmazásokra.)

Ezért van az is, hogy a potenciométeres szorzó szorzószáma csak 0 és 1 között lehet: a valóságban ez egy ellenállásosztót fed, ami nyilván csak csökkenteni tud feszültséget, növelni nem. (És polaritást fordítani sem.) Ezért egy 1,25-ös erősítés megvalósítása hivatalosan nem történhet „karikába írt 1,25-tel", hanem kell egy 0,125-ös potenciométeres szorzó, amit egy 10-es szorzásra állított erősítő követ. De -0,125 sem állítható elő – ahhoz 0,125-ös potenciométeres szorzó kell, egy -1-re állított erősítővel. Látható, hogy a két elem alkalmazásával tetszőleges szorzás „kikeverhető".

K: Miért van az, hogy az integrátor és az összegző kimenete, az integrált, illetve az összeg -1 szerese? Miért nem egyszerűen az integrált vagy az összeg?

Jogos kérdés, erről szintén nem esik szó órán. A válasz ismét csak az, hogy hagyományos okokból. Azok az áramkörök, amelyek megvalósítják ezeket a funkciókat egy olyan áramköri elemre támaszkodnak, ami a kimenetének előjelét (többek között) ellentétére is fordítja. (Pontosabban ezt a bizonyos áramköri elemet ilyen tulajdonságú kapcsolásban működtetjük.) Ennek a dolognak tehát akkor volt jelentősége, amikor még tényleg építettek ilyen áramköröket, hiszen ott nem lehetett azt mondani, hogy ez egy elvi séma, akkor legyen inkább azonos a kimenet (úgy egyszerűbb számolni), ha egyszer abból a szerencsétlen áramkörből ellentett polaritás jött ki. Egyszerűbb volt belevésni a mérnökök fejébe, hogy előjelet fordít és innentől már mindegy, hiszen – mint majd látni fogjuk – szinte ugyanolyan sokszor van szükség az ellentettre is (ahol direkt jól jön, hogy az közvetlenül elérhető), csak hozzá kell szokni, hogy így működik.

K: Mi az a realizálás?

Valaminek (matematikai művelet, átviteli függvény, rendszer, stb.) realizálása alatt lényegében azt értjük, hogy „megépítjük" – tehát megrajzoljuk a sémáját annak a villamos analóg számítógépet, mely pontosan ugyanúgy viselkedik a bemenet-kimenet kapcsolat szinten, mint a realizálandó valami.

Jel- és rendszerelmélet, avagy szabályozástechnika hihetetlenül röviden

K: Mi az a rendszer?

Valami, amibe bemegy egy *jel*, és kijön belőle egy másik jel. (Ebben az esetben beszélünk SISO (single input, single output) rendszerről.) Kicsit általánosabban: bemegy ebbe a valami egy vagy több jel, és kijön belőle egy vagy több jel. (MIMO: multiple input, multiple output rendszer.) Nagyon érzékletes (tényleg!) magyar terminológiánk van itt: a bemenetet szokás *gerjesztés*nek is nevezni, a kimenetet pedig *válasz*nak.

K: Mi az a jel?

Valami, amit mérünk. Egy természeti, legtöbbször fizikai jelenség, amihez számszerű jellemzőt tudunk rendelni. (Például egy feszültség *V*-ban mérve, egy áram *A*-ben, artériás középnyomás *mmHg*-ban, a Balaton hal-koncentrációja hal/m^3-ben, dobutamin infúzió dózisa *μg/perc/ttkg*-ban stb.)

K: Mindezek alapján mondanál példát rendszerre?

Fogsz egy ellenállást, na ez egy rendszer. Bemenete: rákapcsolt feszültség, kimenete: átfolyó áram. (Ez speciel egy igen egyszerű rendszer, hiszen a gerjesztés és válasz közti összefüggés középiskolai tananyag: $I=U/R$.) Hogy mondjak egy példát a bonyolultsági skála túlvégéről: rendszer egy páciens is, akinek a gerjesztése a dobutamin infúzió dózisa, válasza a vérnyomás-változása.

K: Az előbb olyanokat mondtál, hogy bonyolult meg egyszerű rendszer. Ez alatt mégis mit értesz? Vannak bonyolultságra meg egyszerűségre utaló jellemzőik a rendszereknek?

Igen, vannak. Itt most kettőt szeretnék mondani, mert ezek nagyon fontosak.

Lineáris rendszer: egy rendszer akkor lineáris, ha a következő két feltétel teljesül rá:

- Valahányszorosára emelve a bemenetet, ugyanannyiszorosára nő a kimenet. (Ha $u=2$-nél $y=3$ akkor $u=20$-nál $y=30$.)
- Ha megnézzük, hogy mi a rendszer kimenete két rögzített bemenetre, akkor, ha a rendszerre ráadjunk ezen két bemenet összegét, a rendszer kimenete a rájuk külön-külön adott kimenetek összege lesz. (Ha $u=2$-nél $y=30$ és $u=3$-nál $y=45$, akkor $u=5$-nél $y=75$ lesz.)

Ezekre hivatkozott úgy Benyó tanár úr, mint a szuperpozíció elvére, tömören így írható (egyetlen összefüggésben, hiszen a fenti kettő nyilván egybe tömöríthető): $\Re(Au_a + Bu_b) = A\cdot\Re(u_a) + B\cdot\Re(u_b)$, ahol a gót R-rel jelöltem a rendszer operátorát, tehát azt a valamit, aminek megadva a rendszer bemenetét, visszaadja a kimenetét.

A fenti példák vonatkozásában: az ellenállás lineáris rendszer, hiszen a kimenetet úgy kapjuk, hogy a bemenetet elosztjuk egy számmal, erre nyilván teljesülnek a fenti összefüggések. Az ember viszont nemlineáris: egyáltalán nem biztos, hogy kétszer akkor dózisban infundálva dobutaminnal a beteget, kétszer akkor lesz a vérnyomásváltozásának nagysága (sőt…).

Erre még szebb példa a vízcsap, mint rendszer, aminek a bemenőjele az, hogy a csap mennyire van nyitva, a válaszjel, hogy mennyi víz folyik ki belőle. A csap kis ráncigálására eléggé lineáris lesz a válasz (kétszer nagyobb elfordítás, kétszer több víz), de ez nyilván nem terjeszthető ki odáig, hogy százszor nagyobb elfordítás százszor több víz, hiszen legkésőbb ott véget ér a játék, ahol tökig kinyitjuk a csapot. Na, ez egy jó példa a nemlinearitásra. (Ez konkrétan az egyik leggyakoribb nemlinearitástípus, az úgynevezett telítődő jellegű nemlinearitás: egy pontig lineáris a rendszer, de el lehet érni egy határt (esetünkben a teljesen nyitott csapot), ahol valamiféle technikai áteresztési határt elérve „betelít" a rendszer, és nem nő tovább a válasz, hiába emeljük a gerjesztést. Ha valaki arra gondolt, hogy a dobutaminos példa azért *is* jó, mert a vérnyomás egy ponton túl akkor sem fog nőni, ha egy lapáttal beleöntünk a betegbe – na, ez is egy tipikus telítődő jellegű nonlinearitás. Persze itt nyilván még számtalan más nemlinearitás is jelentkezik.)

Idő-invariáns rendszer: egy rendszer időinvariáns, ha adott bemenőjelre ugyanazt a kimenőjelet produkálja holnap, mint ma (ami pedig egyezik a tegnapival), azaz akárhogy toljuk el időben a bemenőjelet, a kimenőjel mindig ugyanaz lesz (persze ugyanannyival eltolva időben). Az ideális ellenállás időinvarinás: mindegy mikor mérem le, adott feszültség hatására adott áram fog rajta átfolyni. A beteg viszont nem az: nagyon is könnyen lehet, hogy adott dobutamin-dózis ma nem ugyanazt a vérnyomás-változást fogja létrehozni, mint holnap.

Remélem a fenti két példa megfelelően érzékeltette, hogy az (ideális) ellenállás a rendszerek legegyszerűbb csoportjába, a lineáris, időinvariáns rendszerekhez (LTI, Linear Time Invariant) tartozik, míg az ember a legbonyolultabbhoz, a nemlineáris, időben variáns rendszerekhez.

K: Hogyan lehet egy rendszert megadni?

Nagyon fontos összefüggés: *minden* lineáris, időinvariáns rendszer felírható egy *n*-ed rendű differenciálegyenlettel, mely a kimenet és a bemenet deriváltjait tartalmazza!

A történet azonban itt nem ér véget, mert a diff. egyenlet kezelése nagyon macerás. Rendszerek jellemzésére ezért több egyéb megoldást is kitaláltak, ezek közül az időtartománybeli, a frekvenciatartománybeli és a komplex frekvenciatartománybeli jellemzéseket fogjuk megnézni.

Az *időtartománybeli jellemzés* arra az ötletre épül, hogy egy adott bemenetre adott választ ismerve kiszámítható más bemenetre adott válasz is. Hangsúlyozom: számítható, tehát semmilyen mérés nem szükséges! Ráadunk egy bemenetet, megnézzük mi a kimenet és ebből olyan bemenetekre adott kimenetet is pontosan meg fogjuk tudni mondani, amit soha nem is adtunk rá a rendszerre! A bizonyítás most nem fontos, de a végeredmény igen: lineáris, időinvariáns rendszereknél ha ismerjük egy *tetszőleges* bemenetre adott kimenetet abból *minden* bemenetre adott kimenet *meghatározható* számítással! Ha gyakorlatban ezt a módszert akarjuk alkalmazni, akkor a kiválasztott bemenetnek (ez az ún. vizsgálójel) érdemes valamilyen jellegzetes jelalakot választani, például ugrásfüggvény (nulla időpont előtt az értéke nulla, utána 1-be ugrik és ott is marad). Az erre adott válasz ismeretében tehát minden bemenetre adott választ (legalábbis elméletben) számítható. A további részleteket az első óra magyarázatánál fogom elmondani. Mivel itt a rendszert egy időbeli adatsorral (nevesül a választott vizsgálójelre adott válasszal) jellemeztük, így ezt a módszer hívjuk időtartománybeli jellemzésnek.

Ezzel azonban nincs vége a történetnek. Csináljuk a következőt: adjunk egy rendszerre adott frekvenciájú szinusz-jelet. Lineáris, időinvariáns rendszerekre teljesül, hogy ekkor a kimenet is szinusz-jel lesz *ugyanazzal* a frekvenciával (a bizonyítás nem lényeges). Tehát lehet, hogy más lesz a kimenőjel amplitúdója, lehet, hogy más lesz a fázisszöge, de egy *biztos*: szintén szinusz lesz, mégpedig azonos frekvenciájú.

Ez most fontos észrevétel? Baromira. Ugyanis van egy tétel, ami szerint a jelek egy széles köre felbontható szinuszjelek összegére. Ez úgy értendő, hogy veszünk bizonyos frekvenciájú szinuszjeleket, megszorozzuk őket bizonyos számokkal, majd összeadjuk és voilá megkaptuk a felbontani kívánt jelet. A tétel azt mondja ki, hogy jelek széles körére mindenképp találunk megfelelő együtthatókat, tehát olyanokat, amivel elvégezve a beszorzást majd összeadást, a felbontani kívánt jelet kapjuk. Nyugodtan felfoghatjuk úgyis, hogy az összegzésbe (ami folytonos esetben nyilván összeintegrálás) valamennyi frekvenciát bevonunk -∞-től +∞-ig, legfeljebb a nem szükségesek együtthatójának nullát választunk. (A széles kör az ún. négyzetesen integrálható jeleket jelenti, vagyis azokat, amiket négyzetre emelve és -∞-től +∞-ig kiintegrálva véges értéket kapunk.) Hogy néz ki egy ilyen felbontás? Szemléletesen nem más, mint a fent említett frekvencia vs adott frekvencia szorzója grafikon. Képzelj el tehát egy koordinátarendszert, aminek a vízszintes tengelyén frekvenciák vannak -∞-től +∞-ig, a függőlegesen pedig amplitúdók. Egy tetszőleges jel szinuszos felbontása (azaz adott frekvenciájú szinuszjelek súlyozott összegére felbontása) ábrázolható ilyen grafikonon, aminek az értelmezése pofonegyszerű: egy adott frekvenciájú szinusz-ból akkora súlyút kell az összegzésbe belevenni, amit a grafikon kijelöl az adott frekvenciánál. (Ezt a grafikont, ami megadja, hogy a jelben az egyes szinuszos komponensek milyen súllyal szerepelnek, szokás spektrumnak is nevezni. Ez látható a winamp-ben is: basszus erőssége a grafikon bal oldalán, szopráné a jobbon.) Nagyon fontos látni, hogy ez az egész akció igazából nem járt semmilyen információ-tömörítéssel (amint azt szokás gondolni): egyszerűen az amplitúdó vs idő grafikont lecseréltük (oda-vissza egyértelmű módon!) egy pont ugyanakkora súly vs frekvencia grafikonra. (Ezt a "lecserélést" nevezik függvénytranszformációnak, ez konkrétan a Fourier-transzformáció.)

Akkor mi értelme az egésznek? Hát itt jön a szép rész. Vegyünk egy rendszert, egy gerjesztést hozzá és a ráadott választ. (Maradjunk az „épeszű” eseteknél, tehát minden szóba jövő jel legyen négyzetesen integrálható.) Ekkor megtehetjük, hogy a gerjesztést és a választ egyaránt lecseréljük Fourier-transzformáltjukra és azt is mondhatjuk, hogy a rendszer e kettő között teremt kapcsolatot. Ilyen szempontból vizsgálódva, most hogyan adhatjuk meg a rendszert? Nagyon egyszerű, nyilván két függvény kell. Az egyik megmutatja, hogy adott frekvencián a kimenet amplitúdója hogy viszonyul a bemenet amplitúdójához, a másik, hogy a kimenet fázisszöge hogy viszonyul a bemenet fázisszögéhez. (E két függvény ráadásul felfogható egyetlen egynek is, ha áttérünk az ún. komplex reprezentációra, amiben az amplitúdókat és a fázisokat nem két valós szám jellemzi, hanem egyetlen komplex, aminek a valós és a képzetes része lesz a két említett valós szám. Tehát az ω körfrekvenciát a továbbiakban $e^{j\omega}$ formában komplexként kezeljük és bevezetjük az $\overline{X} = X \cdot e^{j\rho t}$ ún. komplex amplitúdót, ahol X az eredeti szinuszjel amplitúdója, ρ a fázisszöge. A lényeg az, hogy a továbbiakban a szinuszok frekvencián *kívüli* információt *egyetlen* komplex mennyiségben tároljuk, nem kell két valós szám. Ilyen értelmezésben a rendszer a két komplex szám között teremt kapcsolatot, ld. második megközelítés.) Ezt a függvény nevezik a rendszer *átviteli karakterisztikájának*, és szintén teljes értékű jellemzést ad: ismeretében bármely bemenetre meghatározható a kimenet. Egyszerűen Fourier-transzformáljuk a bemenetet, így megtudjuk, hogy abban milyen súllyal vesznek részt az egyes szinuszos komponensek, majd minden egyes komponensre kiszámoljuk a rendszer átvitelét: mennyivel módosítja az amplitúdóját, mennyivel módosítja a frekvenciáját. Így megkapjuk, hogy a válasz milyen frekvenciájú, amplitúdójú és fázisú szinuszok összegéből fog állni, nincs más dolgunk, mint ezt a Fourier-transzformáció inverzével rekonstruálni.

Más megközelítésben ugyanez: Válasszunk ki egy adott frekvenciát! Adjunk a rendszerre adott frekvenciájú szinusz-jelet, melyet jellemezzünk az $\overline{U}$ komplex amplitúdóval. (Mint láttuk, ebben benne van a jel amplitúdójára *és* fázisára vonatkozó információ, tehát a frekvencián kívül minden.) A válasz szintén szinusz lesz, jelölje komplex amplitúdóját $\overline{Y}$. Ekkor a rendszer átviteli együtthatója a *vizsgált frekvencián* $\overline{H} = \overline{Y} / \overline{U}$. Magyarán: ezzel beszorozva a bemenet komplex amplitúdóját, megkapjuk a kimenet komplex amplitúdóját. Képzeljük el, hogy ezt az együtthatót *minden* frekvencián lemérjük -∞-től +∞-ig! Ekkor egy függvényt kapunk, aminek a paramétere a frekvencia – ez lesz (ismét csak) az átviteli karakterisztika.

Az átviteli karakterisztika lineáris időinvariáns rendszerre mindig racionális törtfüggvény, tehát a frekvenciák polinomjainak hányadosa. Precízebben $j\omega$-k polinomja, hiszen

Most már minden összeállt, hogy kimondjuk a legfontosabb megállapítást: egy lineáris, időinvariáns rendszer válaszának spektruma egyenlő a gerjesztésének spektruma szorozva az átviteli karakterisztikával. Ebből rögtön kibukik a lényeg: a frekvenciatartományon történő leírás (egyik) hatalmas előnye, hogy a válasz számítását diff. egyenletek megoldásáról visszavezeti szorzásra.

Végül van egy harmadik lehetőség is, de azt inkább csak említés szintén mondom. Szóval a frekvenciát elkezdtük kiterjeszteni komplex számmá, de elég furcsa, hogy ezt a $j\omega$-nál abbahagytuk. Ez így ugye csak olyan speciális tulajdonságú komplex számokat fed le, amik valós része 0, de mi szükség erre a korlátra? Nem lehetne általában $s = j\omega + \varphi$-t használni frekvencia gyanánt? De lehet, ez lesz az ún. komplex frekvencia. Ez nagyon leegyszerűsítve azt jelenti, hogy az eddigi frekvenciát, ami egy egyszerű valós skalár volt, lecseréljük egy komplex számra. Az a függvénytranszformáció, ami egy jelet átalakít időtartományról komplex frekvenciatartományra a Laplace-transzformáció.

Ezen az új, komplex frekvencia-tartományon szintén meghatározható egy olyan kifejezés, amivel a rendszer bemenetének Laplace-transzformáltját megszorozva a kimenet Laplace-transzformáltját kapjuk, ezt az átviteli függvény. Lényegében az átviteli karakterisztika általánosítása, ennek megfelelően *s* racionális törtfüggvénye lesz.

Fontos továbbá megjegyezni, hogy egy jel *s*-sel való szorzása, illetve osztása jellemző műveletnek feleltethető meg időtartományon. Ha egy jelet beszorzunk *s*-sel komplex frekvencia-tartományon, az az időtartományban elvégzett deriválásnak felel meg, az *s*-sel való osztás pedig az integrálásnak.

Az 1. óráról

K: Miről szólt az óra?

Bevezető, majd Időbeli lefutású biológiai jelenségek vizsgálata.

K: A Bevezetőből mit kell tudni?

A diasor kint van a honlapomon, más érdekes szóban sem hangzott el. A definíciókat (rendszer, struktúra stb.) és az összehasonlításokat (digitális-analóg) érdemes lehet tudni, volt már, hogy megkérdezte.

K: Miről szólt az Időbeli lefutású biológiai jelenségek vizsgálata rész?

Benyó professzor ott kezdte ezt, ahol én abbahagytam a szabteches bevezetőnél a rendszerek időtartománybeli jellemzését. Megemlítettük, hogy minden lineáris rendszer megadható diff. egyenlettel, majd megnéztük, milyen jeleket érdemes vizsgálójelnek használni: Dirac-δ, egységugrás, sebességugrás, gyorsulásugrás, szinusz.

K: Mi az a Dirac-δ?

Képzeld el a következő vizsgálójelet: mindenhol nulla, kivéve -0,5 és 0,5 között, ahol az értéke 1. Ez így nyilván egy egységnyi területű négyzet. Namost, kezdjük ez a négyzet szélességét csökkenteni, úgy, hogy a területe állandó legyen. Például: már csak -0,1 és 0,1 között nem nulla, de ott értéke 5 ($5 \cdot 0{,}2 = 1$). Ha ezt minden határon túl folytatjuk, akkor kapjuk a Dirac-δ-t. Kicsit kevésbé precízen azt is mondhattam volna, hogy a Dirac-δ egy végtelen rövid, de végtelen nagy impulzus. A jelentősége, hogy spektruma egy vízszintes vonal, azaz minden frekvenciát azonos súllyal tartalmaz. (Ezért mondta azt Benyó professzor, hogy ideális vizsgálójel. Nyilván, hiszen egy ideális vizsgálójeltől azt várjuk el, hogy ne „diszkrimináljon” a frekvenciák között, mindegyikről ugyanannyi információt tegyen hozzáférhetővé.) A rendszer Dirac-δ-ra adott válaszának neve *súlyfüggvény*. Hiába ideális ez a vizsgálójel, a gyakorlatban nem alkalmazható, hiszen végtelen nagy – végtelen rövid impulzus nyilván nincs, akár feszültségről, akár dobutamin dózisáról beszélünk.

K: Mi a helyzet a többi vizsgálójellel?

A Dirac-δ-t kiintegrálva kapjuk az egységugrás függvényt, mely $t=0$-ban átugrik 0-ból 1-be. A rendszer erre adott válasza az *átmeneti függvény*. Ez már kevésbé jó vizsgálójel, mert bár minden frekvenciát hordoz, de nem azonos súllyal. Mégis ezt használjuk a gyakorlatban, hiszen sokkal kivitelezhetőbb. („Kapcsoló” már létezik: lehet feszültséget hirtelen ráadni, infúziót hirtelen megnyitni.)

Mint láttuk, a Dirac-δ az egységugrás deriváltja. Fontos ennek kapcsán megjegyezni, hogy súlyfüggvény az átmeneti függvény deriváltja! Általában is: egy adott bemenőjel deriváltját ráadva a rendszerre, a válasz az eredeti jelre adott válasz deriváltja lesz; ugyanígy az integráltakkal. Hasonlóan tehát: az egységugrás integráltját (sebességugrás) ráadva a rendszerre, a válasz az átmeneti függvény integráltja lesz és így tovább.

K: Mi a helyzet a szinusszal, mint vizsgálójellel?

A szinusz realizálható, de egyetlen egy frekvenciáról hordoz csak információt.

K: Miről volt még szó az órán?

Pár alap szabtech dologról, amiket túlnyomórészt a szabtech bevezetőben már említettem: amplitúdó-fázis függvény (ennek a hivatalos neve átviteli karakterisztika), átviteli függvény. Megnéztük még, hogy adott átviteli függvényű rendszereket különféleképp komponálva (soros, párhuzamos, visszacsatolás) mi lesz az eredő rendszerek átviteli függvénye.

A 2. óráról

K: Miről szólt az óra?

Lineáris egyenletrendszerek megoldásáról analóg számítógéppel.

K: Ez mit jelent?

Képzelj egy szokásos lineáris egyenletrendszert. Ennek megoldására lineáris algebrából ismertek módszerek, pl. Gauss-elimináció. A vicc az, hogy egy ilyen egyenletrendszert analóg számítógéppel is meg lehet oldani!

Az első megoldási lehetőség, hogy minden egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent, és az így kapott *n* darab átalakított egyenlet mindegyikét egy összegzővel reprezentáljuk: az összegző kimenete maga az ismeretlen, a bemenete pedig a kifejezésben van adva. (Csak a kifejezésben leírtak szerint be kell kötögetni az összegzőbe a többi összegző kimeneteként előálló változókat, persze a megfelelő együtthatókkal való beszorzás után.)

Elvileg, ha bekapcsoljuk a power gombot és várunk egy picit, akkor az egyes összegzők kimenetei a keresett értéket adják. (Praktikusan: feszültségmérővel leolvasva az értékeiket, kapjuk az egyenletrendszer megoldását.)

K: Mi ezzel a baj?

Az, hogy az összegző kimenete elvileg *azonnal* változik, ha a bemenet változik. Ezért lesznek olyan saját magukba visszaérő hurkok, amik mentén a jel késleltetés nélkül körbeér. (Ezt szokás algebrai huroknak nevezni.) Ez miért baj? Képzeljük el, hogy a hurok erősítése nagyobb, mint egy! A végletekig leegyszerűsítve: egy egynél nagyobb szorzójú erősítő kimenetét rákötjük a saját bemenetére, majd bekapcsoljuk. Vajon mi fog történni? (Ha valakinek még mindig nem lenne világos a válasz, engedélyezze a számítógépén, hogy a mikrofon hallható legyen a hangfalon, majd tartsa a mikrofont a hangfalhoz…)

Na, ezt el akarjuk kerülni egy egyenletmegoldó számítógépnél :) (Sok más lehetőségünk nincs is, hiszen az így felépített számítógépek a gyakorlatban szinte működésképtelenek.) Erre született meg az integráló megoldás.

K: Mi ez az integráló megoldás? Nem értem milyen deriváltak kerültek bele az egyenletrendszerbe…

Az integráló megoldás alapgondolata, hogy *formálisan* minden egyenlet végére írjuk oda, hogy $= 0 = x'$. Ez látszólag hülyeség, hogy jövünk mi ahhoz, hogy ad hoc deriváltakkal tegyük egyenlő az egyenleteket?! A magyarázat nagyon egyszerű: ha az ilyen elven megépített számítógépünkben beáll a megoldás (azaz a kimeneteken állandósulnak a helyes x_i értékek), akkor azok deriváltja nulla lesz (állandósult értékek!), tehát az $= 0$ helyett teljesen nyugodtan írhatunk $= x_i'$-t is, a kettő *ugyanaz* lesz!

A realizáláshoz ezúttal *n* darab integrátort fogunk használni, melyek kimenetei az egyes változók lesznek, bemenetei pedig az egyenletek jobb oldalai. (Logikusan: ha az $= 0$ helyett $= x_i'$-re cseréltük a bal oldalt, akkor x_i megkapásához integrálnunk kell.) Ami a dolog értelmét adja: mivel az integrátorok (szemben az összeadókkal!) időkéséses elemek (hiszen a bemeneti változás hatása csak idővel jelenik meg rajtuk), ezért *egyáltalán nem* jöhet létre algebrai hurok ebben az elrendezésben! Ez a kulcsa annak, hogy az integráló megoldás miért lesz a gyakorlatban is alkalmazható.

K: Mi a gond az integráló megoldással?

Hadd idézzem magam: “ha az ilyen elven megépített számítógépünkben beáll a megoldás…” *Ha* beáll a megoldás! De mi van, ha nem? Mi van, ha az integrátorok kimenetein soha nem fog semmilyen érték állandósulni, mi van, ha a kimenetetek össze-vissza lengenek? Ez esetben bukik az egész teóriánk, hiszen nem lesz igaz az, hogy a 0-t lecserélhetjük x_i'-re, mondván, hogy állandósult állapotban a kettő úgyis ugyanaz. Ezt nevezik a konvergencia problémájának, hiszen az a kérdés, hogy x_i-k fognak-e valamilyen véges értékhez konvergálni. Némi mátrixalgebrai átalakítások után eljutottunk arra az eredményre, hogy a konvergencia akkor fog létrejönni, ha az együtthatók mátrixa pozitív definit. Sajnos ennek feltétele általában nem ismert, irányelvek, illetve a Hurwitz-kritérium vethető be.

K: És mi volt a 3. megoldás?

A nemzetközi helyzet egyre fokozódik, így a fenti problémára is megoldást találunk. A dolog lényege, hogy az eredeti lineáris egyenletrendszert beszorozzuk az együtthatómátrix transzponáltjával (ezt megtehetjük, azonos átalakítás), majd ezt egyenlővé tesszük a változók deriváltjainak (–1)-szeresével. Ebben az a ráció, hogy az együtthatómátrix és a transzponáltjának szorzata már *mindenképp* pozitív definit lesz. Az így kapott egyenletet realizálva tehát *biztosan* konvergens megoldást kapunk. A gond csak az, hogy így két „feladatot” kaptunk: az egyik feltétel adja meg, hogy a beszorzással létrehozunk egy módosított (mindenképp megoldható) egyenletrendszert (lényegében: a beszorzással gyártunk egy segédváltozót), a másik pedig ennek a (segédváltozóval felírt) egyenletrendszernek a megoldása. Így aztán a realizálásban integrátorokkal oldjuk meg a biztosan konvergens egyenletrendszer (és így az általunk keresett megoldások) számítását, összegzőkkel pedig a bevezetett segédváltozó számítását.

Ennek előnye tehát, hogy mindig konvergens real-time megoldást ad (az együtthatók változhatnak folyamatosan is, jöhetnek pl. mérőműszerről!), hátránya, hogy minden berendezést meg kell duplázni.

A 3. óráról

K: Miről volt szó?

Különféle rendszerek analóg realizálásáról.

K: Mi volt az alapgondolat?

Mint láttuk, minden lineáris, időinvariáns rendszer megadható egy *n*-ed rendű diff. egyenlettel. Mivel most egyelőre csak ilyen tulajdonságú rendszerekkel foglalkozunk, a kérdés úgy is feltehető, hogy egy ilyen diff. egyenletet hogyan lehet analóg módon realizálni. Két alapvetően eltérő mód van: egy magasabb rendű differenciáltat integrálgatunk, vagy egy alacsonyabbrendűt differenciálgatunk. (Hiszen valamilyen formában nyilván az összes differenciáltat meg kell, hogy kapjuk.) Ezen a ponton állapítottuk meg, hogy a differenciáló megoldás zajkiemelő, ezért az integrálót fogjuk használni

K: Mi az a Kelvin-Thomson féle visszavezetési elv?

Az alapgondolat, hogy a diff. egyenletből fejezzük ki a legmagasabbrendű deriváltat. Így kapunk egy egyenlőséget. Namost, ha valamilyen formában előállítjuk az analóg számítógépünk két pontján az egyenlőség két oldalának értékét, akkor ezek a pontok összeköthetőek, hiszen az egyenlőség épp azt fejezi ki, hogy ott azonos értékek vannak. (A ponton tehát azonos feszültségűek, ekvipotenciálisak lesznek.) Induljunk ki a bal oldalból: tegyük fel, hogy megvan a legmagasabb rendű derivált a saját együtthatójával beszorozva. Első lépésben osszunk le ezzel az együtthatóval, így megkapjuk a legmagasabb rendű deriváltat. Ezt egyesével vezessük bele *n* darab integrátorba, ami szépen előállítja az egyre kisebb rendű deriváltakat (integráló megoldás!), míg a végén megkapjuk magát a függvényt, ami kielégíti a diff. egyenletet. (Azaz, adott bemenő függvény mellett a rendszer válaszfüggvényét.) Ehhez persze még áramkörileg is “fel kell írnunk” az egyenlőséget. De innen már ez nem nehéz: az egyenlet jobb oldala egyetlen hatalmas összeg, melyet egy összegzővel meg is valósíthatunk. Ebbe egyrészt bele kell vezetni a bemenőjelet (pontosabban az ellentettjét, hiszen az összegző előjelet fordít), valamint a megfelelő együtthatókkal beszorzott (legmagasabbnál alacsonyabb rendű) deriváltakat. De hát ezek rendelkezésre állnak a más megépített integrátorlánc pontjainak megcsapolásával! Az egyetlen dolog amire figyelni kell, hogy minden második megcsapolásnál a megfelelő derivált *ellentettjét* kapjuk az integrátor előjelfordító tulajdonsága miatt, ezeknél tehát nekünk is egyszer előjelet kell fordítani. Az elegáns módszer: ezeket egy külön segédösszegzőbe vezetni (az, összegző lévén, elvégzi a kívánt előjelfordítást), majd annak kimenetet bevezetni a főösszegzőbe. Még egyszer: a negatív előjelű deriváltakat kell segédösszegzőbe vezetni, a pozitívakat közvetlenül a főösszegzőbe. (Így minden derivált pozitívan érkezik a főösszegzőbe, ami fordít egyet, így kapjuk (a kívánt módon, ld. legmagasabb rendűre rendezett függvény!) negatív előjelű alacsonyabb rendű deriváltakat az összegben.)

K: Milyen példákat láttunk minderre?

Az infragenerátort, ami egy speciális tulajdonságú diff. egyenlet realizálása, és a paraméterének függvényében érdekes válaszfüggvényt produkál egységugrás bemenetre. Egy kétváltozós esetet a kereszthatások szemléltetésére. Végül megnéztük az algebrai hurkok kiküszöbölésének módszerét.

K: Mi jött ezután?

Megnéztük hogyan lehet átviteli függvényeket realizálni analóg módon. Az átviteli függvény problémája, hogy a belőle származtatható diff. egyenlet ugyan leírja a rendszert, de benne lesznek a bemenetnek *és* a kimenetnek is a különféle deriváltjai, így a Kelvin-Thomson elv szerinti realizálásban megint csak deriválók lennének, amit ugye nem szeretnénk. E problémára két megoldást is láttunk: a segédváltozósat és a direkt programozást.

A *segédváltozós megoldás* lényege, hogy az átviteli függvényt beszorozzuk, majd el is osztjuk egy ún. segédváltozóval. Ezt követően kettébontjuk Z/X_{be} és X_{ki}/Z hányadosokra, megfelelő jobb oldalakkal. Elvégezzük a beszorzásokat olyan módon, hogy ahol s-sel szorzunk, ott a függvény beszorzása helyett a függvény deriváltját jelöljük. (Emlékezzünk rá, az s-sel szorzás időtartományon deriválást jelent!) Hasonlóan s^2-tel szorzás kétszeri deriválás stb. Így két egyenlethez jutunk, melyek közül elsőként az A_i-ket tartalmazót realizáljuk Kelvin-Thomson elv alapján. Ha ez megvan, akkor megkaptuk a segédváltozó összes lehetséges deriváltját. Innen már nyert ügyünk van, hiszen a B_i-ket tartalmazó egyenlet leírja, hogy lehet ezekből a deriváltakból a kimenetet előállítani. Nincs más dolgunk, mint ezt - a megfelelő együtthatókkal szorzással, illetve előjelfordítással - végrehajtani.

A *direkt programozás* módszere az átviteli függvény algebrai átalakításán alapul. Nem részleteztük, hogy pontosan hogyan, de az átviteli függvény átalakításokkal a jegyzetben jelölt alakra hozható, melynek előnye, hogy könnyen realizálható. Egy hosszú vezetéken végigvisszük x_{be}-t mellette $(-x_{be})$-vel. Emellett felépítünk egy n darab integrátorból álló integrátorláncot. Most nézzük meg az átalakított függvényt! Azt látjuk, hogy például x_{be} c_n-nel szorozott értéke n-szer van kiintegrálva. (Emlékezzünk: ahogy az s-sel szorzás időtartományon deriválás, úgy az s-sel osztás integrálás!). A megoldás egyszerű: megcsapoljuk x_{be}-t, beszorozzunk c_n-nel, majd bevezetjük a *legutolsó* integrátorba. Abban kiintegrálódik ez, majd átkerül a következőbe, ahol újra integrálódik, és így tovább, az utolsó integrátor valóban épp az n-edik integrálását fogja elvégezni. A legutolsó utáni integrátorba természetesen az *n-1* darab integrálást igénylő tagot kell bevezetnünk és így tovább. Ezek természetesen mind összeadódnak egymással, így haladunk az átalakított kifejezés realizálásában. Annyi zárófeladatunk van még, hogy az utolsó integrátor után egy összegzőbe bevezessük az egyszer se integrálandó $C_0 \cdot x_{be}$-t. Ekkor a kimeneten megkapjuk x_{ki}-t, amit végigvezetünk az integrátorlánc mentén (ellentettjével együtt) és így megkaptuk a realizáláshoz szükséges másik tagot. Itt se feledkezzünk meg róla, hogy az integrátor előjelet fordít, így felváltva kell a pozitív és negatív jeleket bekötnünk az integrátorba. (Itt is érdemes lehet ujjal végigkövetni, hogy egy adott jel pozitív vagy negatív előjellel kerül-e a kimenetre! x_{be}-s tagoknak pozitívval kell, az x_{ki}-seknek negatívval.)

K: Mivel foglalkoztunk még?

Parciális diff. egyenletek realizálásával. A képleteket ismerve nem lehet gond a realizálás, de nem hinném, hogy ez számonkérésen szerepelne. (Tévedés joga (sajnos) fenntartva…)

K: Mit tanuljak meg rendesen ebből az órából ZH-ra?

Kelvin-Thomson elv, Átviteli függvény realizálása segédváltozóval és direkt programozással - mindezek gyakorlata. A dolog *teljesen mechanikus*, nem igényel semmi gondolkodást, érdemes megtanulni és (például) a füzetemben lévő mintapéldákkal annyira begyakorolni, hogy vizsgán is reflexből tudd írni és rajzolni. Van egy erős tippem, hogy lesz valamelyik ezek közül, urambocsá’ több is.